Résumés de cours

7 février 2022

Cours du jeudi 3 février 2022

1 Algèbre et géométrie

Dans cette partie k est un corps commutatif (par exemple, $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, *etc*).

1.1 Formule de Grassmann

Théorème. Soit G un $k-$espace vectoriel. Soient $E, F \leq G$ deux sous-espaces. Alors

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \ .$$

Démo. L'application linéaire

$$E \times F \to G,\ (x, y) \mapsto x + y$$

a pour image $E + F$ et pour noyau $\{(x, -x)\ :\ x \in E \cap F\} \simeq E \cap F$.
D'après le théorème du rang,

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \ .$$

Remarque. Il n'y a pas de formule similaire pour trois sous-espaces : en général

$$\dim(E_1 + E_2 + E_3) \neq$$

$$\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 - \dim(E_1 \cap E_2) - \dim(E_2 \cap E_3) - \dim(E_1 \cap E_3) + \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

2 Dualité

Soit E un $k-$espace vectoriel.
Définition. Le *dual* de E, noté E^* est :

$$E^* = \mathrm{Hom}_k(E, k)$$

l'espace des applications linéaires de E vers k. Les éléments de E^* sont appelés *formes linéaires*

2.1 Bases duales

Définition. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors on note

$$^\forall i,\ e_i^* : x_1e_1 + ... + x_ne_n \mapsto x_i \ .$$

Les e_i^*, $1 \leq i \leq n$, forment une base de E^*. C'est la *base duale* de la base $(e_1, ..., e_n)$. On dit aussi que la base $(e_1, ..., e_n)$ est la base *antéduale* de la base $(e_1^*, ..., e_n^*)$.

En particulier, si E est de dimension finie, alors E^* aussi et $\dim E^* = \dim E$.

Exemple. Soit E un $k-$espace vectoriel de base e_1, e_2, e_3. On pose $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Alors (f_1, f_2, f_3) est aussi une base de E. La base duale associée à (f_1, f_2, f_3) est donnée par

$$f_1^* = e_1^* - e_2^*,\ f_2^* = e_2^* - e_3^*,\ f_3^* = e_3^* \ .$$

2.2 Bidual

Si $x \in E$, on pose $\widehat{x} : E^* \to k$, $\lambda \mapsto \lambda(x)$.

Alors $\widehat{x} \in E^{**}$ et l'application $E \to E^{**}$, $x \mapsto \widehat{x}$ est injective.

Proposition. Si E est de dimension finie, alors $x \mapsto \widehat{x}$ est un isomorphisme : $E \simeq E^{**}$.

Démo. Car $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$.

2.3 Hyperplans

Définition. Un hyperplan H de E est un sous-$k-$espace vectoriel e codimension 1 (*c-à-d* qu'il existe un supplémentaire de H dans E de dimension 1). Si E est de dimension n, H est un sous-espace de dimension $n - 1$.

Proposition.

i) Si $0 \neq \lambda \in E^*$, alors $\ker \lambda$ est un hyperplan de E.

ii) Si $H \leq E$ est un hyperplan, il existe $0 \neq \lambda \in E^*$ tel que $H = \ker \lambda$.

iii) Si $0 \neq \lambda, \mu \in E^*$, alors

$$\ker \lambda = \ker \mu \Leftrightarrow {}^\exists 0 \neq t \in k,\ \lambda = t\mu \ .$$

2.4 Orthogonal

Définition. Soient $F \leq E$ et $G \leq E^*$, on pose :

$$F^\perp = \{\lambda \in E^* \ : \ ^\forall x \in F,\ \lambda(x) = 0\}$$

$$G^\circ = \{x \in E \,:\, {}^\forall \lambda \in G,\, \lambda(x) = 0\}\ .$$

Propriétés. Soient $F \leq E$ et $G \leq E^*$. **On suppose E de dimension finie.**

a) Alors $F^\perp$ et G° son des sous-$k-$espaces vectoriels de E et E^* ;
b) si $F_1 \leq F_2 \leq E$ et $G_1 \leq G_2 \leq E^*$, alors $F_1^\perp \geq F_2^\perp$ et $G_1^\circ \geq G_2^\circ$;
c) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$;
d) $(F^\perp)^\circ = F$ et $(G^\circ)^\perp = G$;
e) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$;
f) $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Démo. On montre $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$. Soit $(e_1, ..., e_d)$ une base de E. on complète en une base $(e_1, ..., e_d, e_{d+1}, ..., e_n)$ de E^*. On montre facilement que $F^\perp$ a pour base

$$(e_{d+1}^*, ..., e_n^*)$$

donc $\dim F^\perp = n - d = \dim E - \dim F$.

Pour montrer $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$, on vérifie l'inclusion évidente

$$(F_1 \cap F_2)^\perp \geq F_1^\perp + F_2^\perp$$

et on compare les dimensions grâce à la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned}
\dim(F_1^\perp + F_2^\perp) &= \dim F_1^\perp + \dim F_2^\perp - \dim F_1^\perp \cap F_2^\perp \\
&= \dim E - \dim F_1 + \dim E - \dim F_2 - \dim(F_1 + F_2)^\perp \\
&= \dim E - \dim F_1 + \dim E - \dim F_2 - (\dim E - \dim(F_1 + F_2)) \\
&= \dim E - \dim F_1 - \dim F_2 + \dim(F_1 + F_2) \\
&= \dim E - \dim F_1 \cap F_2 \\
&= \dim(F_1 \cap F_2)^\perp\ .
\end{aligned}$$

Exercice. (n° 3, fiche 1)

Soient

$$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3),\ v_2 = (1, 4, -3, 4, 2),\ v_3 = (2, 3, -1, -2, 9)$$

des vecteurs de $\mathbb{R}^5$.

Soit $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. La forme linéaire $\lambda = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_5 x_5$ est dans $F^\perp$ si et seulement si

$$\lambda(v_1) = \lambda(v_2) = \lambda(v_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 2\lambda_5 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 + 9\lambda_5 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 - \lambda_5 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= -\lambda_3 + 4\lambda_4 - 6\lambda_5 \\ \lambda_2 &= \lambda_3 - 2\lambda_4 + \lambda_5 \end{cases}$$

donc $F^\perp$ a pour base les 3 formes linéaires suivantes :

$$-x_1 + x_2 + x_3,\ 4x_1 - 2x_2 + x_4,\ -6x_1 + x_2 + x_5\ .$$

En particulier F est de dimension $5 - 3 = 2$ et peut être défini par les équations :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \end{cases} .$$

2.5 Transposée

Définition.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On note

$${}^t f : F^* \to E^*,\ \lambda \mapsto \lambda \circ f$$

c'est la *transposée* de f.
Remarque. Si f est linéaire, ${}^t f$ aussi !
Propriétés.

3 Calcul différentiel

Pour chaque $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, on choisit sur $\mathbb{R}^n$ une norme quelconque notée $||\cdot||$ et on considère la topologie associée (c'est la même topologie quelle que soit la norme choisie).

3.1 Applications différentiables

Définition. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit qu'une application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire :

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

telle que

$$^{\exists}\epsilon > 0,\ ^{\forall}||h|| < \epsilon,\ f(a+h) = f(a) + L(h) + o(||h||)\ ^{*}$$

Remarque. Si la fonction f est différentiable en a, alors l'application L est unique. On la note $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Définition. Soit $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'une application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est dérivable *dans la direction du vecteur* v si

$$\partial_v f(a) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable dans toutes mes directions et

$$^{\forall}0 \neq v \in \mathbb{R}^n,\ \partial_v f(a) = df_a(v)\ .$$

Exemples.

Une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $dL_a = L$.

On choisit une *norme multiplicative* sur l'espace des matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ [†].

L'application $M \mapsto M^2$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, sa différentielle en M est l'application linéaire :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ H \mapsto MH + HM\ .$$

En effet,

$$(M+H)^2 = M^2 + \underbrace{MH + HM}_{\text{linéaire en } H} + H^2 = M^2 + MH + HM + o(||H||)\ .$$

∗. C-à-d. $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{||f(a+h) - f(a) - L(h)||}{||h||} = 0$.

†. C'-à-d. $^{\forall}M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ ||M_1M_2|| \leq ||M_1||||M_2||$; par exemple si $||\cdot||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on peut choisir

$$^{\forall}M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ ||M|| = \sup_{0\neq X\in\mathbb{R}^n} \frac{||MX||}{||X||}\ .$$

Plus généralement si $k \geq 1$ est un entier, l'application $M \mapsto M^k$ est différentiable et pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la différentielle en M est l'application linéaire :

$$H \mapsto \sum_{j=0}^{k-1} M^j H M^{k-1-j} \ .$$

En effet, on peut montrer par récurrence sur $k \geq 1$ que :

$$^{\forall}M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ ||(M+H)^k - M^k - \sum_{j=0}^{k-1} M^j H M^{k-1-j}||$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} ||H||^j ||M||^{k-j}}_{=O(||H||^2)} \ .$$

On en déduit que l'exponentielle

$$\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

est différentiable et voici sa différentielle :

$$^{\forall}M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ ^{\forall}H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ d\exp_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} M^j H M^{k-1-j}}{k!} \ ^{*}$$

3.2 Dérivées partielles, jacobienne

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. **Notation.** Soit $1 \leq j \leq n$. Si f admet une dérivée dans la direction du vecteur e_j, on pose

$$\partial_j(f)(a) = \partial_{e_j} f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} \ .$$

$*$. La convergence ne pose pas de problème et on montre en effet que :

$$^{\forall}M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \left|\left| \ e^{M+H} - e^M - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} M^j H M^{k-1-j}}{k!} \ \right|\right|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{||H||^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||M||^k}{k!} = e^{||M||}(e^{||H||} - 1 - ||H||) = O(||H||^2) \ .$$

Définition. Si elle existe, la *jacobienne* de f en a est la matrice

$$\mathrm{Jac}_a(f)\,(\partial_j f_i(a))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

où $f = (f_1, ..., f_m)$.
Théorème.
On suppose que les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de $a \in U$. Alors f est différentiable en a et :

$$^\forall(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n,\ df_a(t_1, ..., t_n) = \sum_{j=1}^{n} t_j \partial_j f(a)\ .$$

3.3 Différentielle d'une composée

Théorème. Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des ouverts. Soient

$$f : U \to \mathbb{R}^m,\ g : V \to \mathbb{R}^l$$

des applications. Soit $a \in U$.
On suppose que $g(V) \subseteq U$, que f est différentiable en a et que g est différentiable en $f(a)$; Alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$ est diférentiable en a et :

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a\ .$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On pose

$$g = f \circ h$$

où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.
Déterminer les dérivées partielles $\partial_x g$, $\partial_y g$ en fonction de f.
Comparer avec la jacobienne de f et celle de h.
Réponse. On pose $x_1 = x^2 - y^2$, $x_2 = 2xy$. Alors

$$\partial_x g = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x}$$

$$= 2x\partial_{x_1} f(x^2 - y^2, 2xy) + 2y\partial_{x_2} f(x^2 - y^2, 2xy)\,;$$

$$\partial_y g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y}$$

$$= -2y\partial_{x_1} f(x^2 - y^2, 2xy) + 2x\partial_{x_2} f(x^2 - y^2, 2xy)\,.$$

On a

$$\mathrm{Jac}_{(x_1,x_2)}(f) = (\partial_{x_1} f \, \partial_{x_2} f) \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R}),$$

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(h) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ .$$

On a donc

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ h) = \mathrm{Jac}_{(x^2-y^2,2xy)}(f).\mathrm{Jac}_{(x,y)}(h) \ldots$$

Index