Cours du jeudi 5 mai

Algèbre et géométrie

Corps

Définition. Un corps $(K, +, .)$ est un anneau commutatif tel que

$$K^\times = K \setminus 0$$

c-à-d dont tous les éléments non nuls sont inversibles pour la multiplication.

Exemples. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}$, $\mathbb{Z}[i]/3$, $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$, A/m si m idéal maximal, $Frac(A)$ corps des fractions d'un anneau intègre.

Caractéristique d'un corps. Si K est un corps, le noyau du morphisme

$$\mathbb{Z} \to K,\ n \mapsto \underbrace{1 + ... + 1}_{n}$$

est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un $n = 0$ ou p premier > 0. L'entier n est la *caractéristique.*

Degré et multiplicativité.

Si $K \leq L$ sont des corps , on note $[L : K]$ la dimension de L comme $K-$espace vectoriel.

Exemples. $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

Proposition. Si $K_1 \leq K_2 \leq K_3$, alors :

$$[K_3 : K_1] = [K_3 : K_2][K_2 K_1] \ .$$

Nombres algébriques

Théorème. Soient $E \leq F$ deux corps. Soit $x \in F$. Alors sont équivalentes :

(i) il existe $0 \neq P \in E[X]$ tel que $P(x) = 0$.

(ii) Le $E-$espace vectoriel $E[x]$ est de dimension finie.

(iii) $E[x] = E(x)$ est un corps.

Dans ce cas on dit que x est *algébrique* sur E.

Définition. Si x est algébrique sur E, on appelle *polynôme minimal* de x sur E, le polynôme $\pi_{x,E}$, unitaire générateur de l'idéal

$$M_x = \{P \in E[X] \ : \ P(x) = 0\} \ .$$

Propriétés. On a un isomorphisme d'anneaux $E(x) \simeq E[X]/(\pi_{x,E})$. En particulier, $\deg \pi_{x,E} = [E(x) : E]$ et $\pi_{x,E}$ est irréductible sur E.

Corollaire. Si x, y sont algébriques sur E, alors

$$x \pm y,\ xy,\ \frac{x}{y}$$

aussi.

Exercice. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

Solution. Poser $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. On a

$$(\alpha^2-5)^2 = 24 \Rightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0\ .$$

Or $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ donc le degré du plolynôme minimal est 4. Donc le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ est le polynôme $X^4 - 10X^2 + 1$.

Corps de ruptures.

Soit P un polynôme irréductible sur K. Le corps $K[X]/(P)$ s'identifie à un corps contenant K. C'est un corps engendré par une racine de P.

Exemple. $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

Corps finis.

Soit p un nombre premier. On note $I_k(p)$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré k sur $\mathbb{F}_p$.

Théorème.

$$X^{p^n} - X = \prod_{\substack{d|n \\ P\in I_d(p)}} P\ .$$

Corollaire.

$$\forall n,\ |I_n(p)| = \frac{1}{n}\sum_{d|n}(-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}p^d$$

où $\mu(l) = \begin{cases} (-1)^s & \text{si } n = p_1 ... p_s \text{ produit de nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré.} \end{cases}$

Corollaire. Pour tout n il existe un corps de cardinal p^n.

Démo. On a $nI_n(p) \geq p^n - \sum_{d<n} p^d = p^n - \frac{p^n-1}{p-1} \geq p^n - (p^n-1) = 1$.

Remarque. À isomorphisme près, il n'y a qu'un seul corps de cardinal p^n.

Analyse complexe

Séries de Laurent.

Une série de Laurent est une série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

où $^\forall n,\, a_n \in \mathbb{C}$.

Une série de Laurent convergente est une série de laurent telle que les deux sommes

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ et } \sum_{n>0} a_{-n} z^{-n}$$

convergent.

Analyse Complexe

Théorème de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$. Soit γ une « combinaison de lacets » dans Ω telle que :

$$^\forall w \notin \Omega,\, Ind_\gamma(w) = 0 \ .$$

Alors $\int_\gamma f = 0$ et

$$^\forall w \in \Omega \setminus \gamma,\, Ind_\gamma(w) f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \ .$$

Séries de Laurent

Une série de Laurent est une série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \ .$$

Théorème. Soit f une fonction holomorphe sur la *couronne*

$$C(a, r_1, r_2) = \{z \ : \ r_1 < |z-a| < r_2\}$$

où $a \in \mathbb{C}$, $0 < r_1 < r_2$.

Il existe une série de Laurent $\sum_n a_n (z-a)^n$ qui converge sur la couronne $C(a, r_1, r_2)$ de somme $f(z)$.

De plus,

$$^\forall n,\, ^\forall r_1 < r < r_2,\, a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

Théorème des résidus

Singularités isolées, résidus

Soit f une fonction. On dit que f a une *singularité isolée* en $a \in \mathbb{C}$ s'il existe $r > 0$ tel que f est holomorphe sur $D^{\cdot}(a, r) = \{z \ : \ 0 < |z-a| < r\}$.

Le *résidu* de f en a est le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f au voisinage de a, noté $\text{Rés}(f, a)$.

Théorème des résidus. Soient

— f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_1, ..., a_N\}$
— avec des singularités isolées en les a_i,
— γ un lacet dans Ω qui ne passe pas par les a_i.
Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \text{Rés}(f, a_j) Ind_\gamma(a_j) \ .$$

Applications. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a\cos t + 1}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$