Cours du jeudi 12 mai

Algèbre et géométrie

Corps

Unicité des corps finis.

Proposition. Soit p un nombre premier, soit $n \geq 1$. Il existe un unique corps de cardinal p^n à isomorphisme près.

Démo. Soit P un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$ de degré n. Soit K un corps fini de cardinal p^n. Alors

$$^\forall x \in K,\, x^{p^n} = x$$

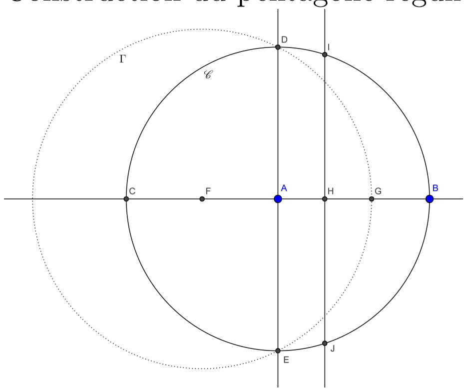
donc $X^{p^n} - X = \prod_{x \in K} X - x$. Or $P | X^{p^n} - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ donc P a une racine $\alpha \in K$. Mais alors on a un isomorphisme

$$\mathbb{F}_p[X]/(P) \simeq K,\, X \bmod P \mapsto \alpha\ .$$

Exercices sur les corps finis. Numéros 20,21,22 (théorème de Sylow) de la feuille sur les corps.

Nombres constructibles à la règle et au compas.

Construction du pentagone régulier ...



Dans le dessin ci-dessus, on a :

$$AB = 1 = AC$$

$$F \text{ milieu de } [AC]$$

$$FD = FG$$

$$H \text{ milieu de } [AG]$$

$$AH = \cos \frac{2\pi}{5}\ .$$

Vérifier :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ .$$

Analyse complexe

Applications du théorème des résidus
Exercices. Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin x dx}{x^4+5x^2+4},\ \int_0^{+\infty}\frac{x^a dx}{x(1+x^n)},\ 0<a<1,\ n\in\mathbb{N}_{>0}$$

Théorème de Rouché. Soit γ un lacet dans Ω ouvert de $\mathbb{C}$ tel que

$$^\forall\omega\in\Omega\ \setminus\ \gamma,\ Ind_\gamma(\omega) = 0ou1\ .$$

i) Soit f une fonction holomorphe sur Ω. alors le nombre de zéro de f « à l'intérieur de γ » est

$$Z\gamma(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f'}{f}\ .$$

ii) Soient f, g deux fonctions holomorphes sur Ω. Si $|f-g|<f$ sur γ, alors

$$Z_\gamma(f) = Z_\gamma(g)\ .$$

Corollaire. *Théorème de l'application ouverte.* Soit f une fonction holomorphe non constatnte sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Alors $f(\Omega)$ est ouvert.

Théorème de la représentation conforme de Riemann. Soient $\emptyset\neq\Omega_1,\Omega_2\neq\mathbb{C}$ deux ouverts simplement connexes† de $\mathbb{C}$. Alors il existe un biholomorphisme

$$\Omega_1\approx\Omega_2$$

(un biholomorphisme est une application bijective holomorphe dont la réciproque aussi est holomorphe).

Exemple. L'application $z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme de $\{z : \mathrm{Im}z>0\}$ vers $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|<1\}$.

†. un ouvert Ω est simplement connexe si Ω et $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ sont connexes. Cela équivaut à : toute fonction holomorphe f qui ne s'annule pas sur Ω peut s'écrire $f=\exp g$.