COURS DU JEUDI 17 FÉVRIER 2022

1 Analyse matricielle

Normes subordonnées.

Définition.

Soit $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On pose

$$^{\forall}A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ ||A|| = \sup_{0\neq X\in\mathbb{R}^n}\frac{|AX|}{|X|}\ .$$

Propriétés.

i) C'est une norme !

ii) $^{\forall}A, B \in \mathscr{M}_n(R)$, $||AB|| \leq ||A||||B||$.

iii) $^{\forall}A \in \mathscr{M}_n(R)$, $||A|| = \sup_{|X|=1}|AX| = \max_{|X|=1}|AX|$.

Exemples.

i) $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |A_{ij}|$;

ii) $||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n |A_{ij}|$;

iii) $||A||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} = \sqrt{\max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}({}^tAA)}\lambda}$.

2 Probabilité

Définitions.

Une *variable aléatoire* est une application mesurable $X : \Omega \to E$ où E est un espace mesurable et Ω un espace mesurable avec une mesure de probabilité P (mesure positive et de mesure totale 1).

La loi de X est la mesure image sur les parties de E qui sont mesurables :

$$P_X(B) := P(X^{-1}B)$$

parfois, on note $P_X(B) = P(X \in B)$.

Si $E \subseteq \mathbb{R}$, on pose (si c'est défini) :

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)dP_X(\omega)\ \textit{l'espérance de } X$$

$$\mathrm{var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \textit{la variance de } X$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}\textit{l'écart-type de } X\ .$$

Exemples. (*cf.* exercice 4 feuille de TD de probabilités 1)

i) *Loi de Bernoulli.* $X : \Omega \to \{0,1\}$, $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$ où $0 \leq p \leq 1$.
Alors $E(X) = 0.P(X=0) + 1P(X=1) = p$, $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2.(1-p) + 1^2.p - p^2 = p - p^2$.

ii) *Loi de Poisson.* $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $^\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
Alors $E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$. Et $\mathrm{var}(X) = \sum_{k\geq 0} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k\geq 0} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k\geq 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

iii) *Loi Exponentielle.*

$$P_X(dx) = 1_{\mathbb{R}_+}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Cela signifie que la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$P(X \leq t) = \int_0^t 1_{R_+}(u)\lambda e^{-\lambda u}du$$

En particilier, on a :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

(par intégration par parties)

$$= [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}\ .$$

Pour la variance, on a :

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \lambda^2$$

(par intégration par parties)

$$= \frac{1}{\lambda^2}\ .$$

3 Algèbre et géométrie

Soit K un corps qui peut être $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions.

Une *forme bilinéaire* $\varphi : E \times E \to K$ est une application telle que :

$$^{\forall}x \in E,\ \varphi(x, \cdot) : E \to K$$

et

$$^{\forall}y \in E,\ \varphi(\cdot, y) : E \to K$$

sont linéaires.

Une forme bilinéaire *symétrique* est une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to K$ telle que

$$^{\forall}x, y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\ .$$

Remarque. Si $B_1, B_2 : E \times E \to K$ sont bilinéiaires symétriques, alors $B_1 = B_2$ si et seulement qi

$$^{\forall}x \in E,\ B_1(x, x) = B_2(x, x)\ .$$

En effet, on a

$$^{\forall}x, y \in E,\ B_1(x, y) = \frac{B_1(x + y, x + y) - B_1(x, x) - B_1(y, y)}{2}\ .$$

Définition. Une forme *quadratique* est une application $q : E \to K$ telle que l'application

$$E \times E \to K,\ (x, y) \mapsto \frac{q(x + y) - q(x) - q(y)}{2}$$

est bilinéaire †

On note $B_q(x, y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$ la forme bilinéaire symétrique associée à q. C'est la *forme polaire de* q .

Remarque. Soit E un $K-$espace vectoriel. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors une application $q : E \to K$ si et seulement si l'application

$$K^n \to K,\ (x_1, ..., x_n) \mapsto q(x_1e_1 + ... + x_ne_n)$$

est polynomiale homogène de degré 2.

Exemple. Soit $l \in E^*$. Alors l'application $l^2 : E \to K,\ x \mapsto l^2(x)$ est une forme quadratique ‡.

†. Forcément c'est symétrique !

‡. de forme polaire : $(x, y) \mapsto l(x)l(y)$.

Définitions.

Soit $q : E \to K$ une forme quadratique. Le *cône isotrope de* q est

$$C_q = q^{-1}(0)$$

attention, en général, C_q n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Le *noyau de* q, noté $\ker q$, est le noyau de la forme polaire B_q de q :

$$\ker q = \{x \in E \ : \ {}^{\forall} y \in E,\ B_q(x,y) = 0\} \ .$$

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $q : E \to K$ une forme quadratique, alors il existe des formes linéaires $l_1, ..., l_N$ linéairement indépendantes dns E^* telles que

$$q = a_1 l_1^2 + ... + a_N l_N^2$$

pour certains coefficients $a_1, ..., a_N \in K$.

Remarque. Ni les l_i ni les coefficients a_i ne sont uniques.

Démo. Méthode de Gauss. On raisonne par récurrence sur la dimension de E.

Soit $q : K^n \to K$ une forme quadratique.

Deux cas sont possibles :

Premier cas. La forme q « commence » par un terme en x_1^2

Soit $q = ax_1^2 + x_1 B(x_2, ..., x_n) + C(x_2, ..., x_n)$ où $0 \neq a \in K$, B est linéaire et C quadratique.

Alors on décompose :

$$q = a(\underbrace{x_1 + \frac{B}{2a}}_{=:l_1})^2 + \underbrace{C - \frac{B^2}{4a}}_{quadratique\, en\, x_2,...,x_n} \ .$$

Deuxième cas. La forme q n'a pas de terme en x_1^2 et « commence » par un terme en $x_1 x_2$

Soit $q = ax_1x_2 + x_1 B(x_3, ..., x_n) + x_2 C(x_3, ..., x_n) + D(x_3, ..., x_n)$ où $0 \neq a \in K$, B, C sont linéaires en $x_3, ..., x_n$ et D quadratique en $x_3, ..., x_n$. Alors on décompose :

$$q = a(x_1 + \frac{C}{a})(x_2 + \frac{B}{a}) + D - \frac{BC}{a}$$

$$= \frac{a}{4}\left((\underbrace{x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}}_{=:l_1})^2 - (\underbrace{x_1 - x_2 + \frac{B-C}{a}}_{=:l_2})^2 \right) + \underbrace{D - \frac{BC}{a}}_{quadratique\, en\, x_3,...,x_n} \ .$$

Exemples.

a) $q_1 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2$.

b) $q_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2$.

4 Calcul différentiel et analyse complexe

Calcul de la différentielle de l'inversion des matrices

Soit $I : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$.
Alors I est différentiable et :

$$^\forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ ^\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ dI_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}\ .$$

En effet, choisissons une norme $||\cdot||$ multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $||H|| < \frac{1}{||M^{-1}||}$, alors on a :

$$\begin{aligned}(M+H)^{-1} &= (M(I_n + M^{-1}H))^{-1}\\ &= (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(M^{-1}H)^kM^{-1}\\ &= M^{-1}\underbrace{-M^{-1}HM^{-1}}_{\textit{linéaire en } H} + o(||H||)\ .\end{aligned}$$

Théorèmes d'inversion locale et d'inversion globale

Remarque. L'application

$$f\ :]0,1[\to S^1 = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\},\ t \mapsto e^{2i\pi t}$$

est continue bijective mais la réciproque

$$f^{-1}\ :\ S^1 \to]0,1[,\ e^{2i\pi t} \mapsto t$$

ne l'est pas ! †

En revanche sous certaines conditions une fonction $\mathscr{C}^1$ bijective a une réciproque qui est aussi $\mathscr{C}^1$.

Théorème. Soit $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathscr{C}^1$. ‡

†. Car $\lim_n e^{\frac{2i\pi}{n}} - e^{2i\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)} = 0$ mais $\lim_n \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 \neq 0$.

‡. C-à-d. que F est différentiable sur U et que l'application

$$U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n),\ a \mapsto df_a$$

est continue.

a) Inversion locale. Soit $a \in U$ tel que $dF_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est **inversible**. Alors il existe un ouvert $a \in V \subseteq U$ tel que $F(V)$ est ouvert et la restriction :

$$F : V \to F(V)$$

est un $\mathscr{C}^1-$difféomorphisme[§].

b) Inversion globale. Si pour tout $a \in U$, la différentielle $dF_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est **inversible** et si F est **injective**, alors $F(U)$ est ouvert et $F : U \to F(U)$ est un $\mathscr{C}^1-$difféomorphisme.

Remarque. Si F est $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$, alors on peut remplacer $\mathscr{C}^1$ par $\mathscr{C}^k$.

§. C'-à-d une bijection $\mathscr{C}^1$ dont la réciproque est aussi $\mathscr{C}^1$.

Index