Cours du jeudi 3 mars 2022

1 Algèbre et géométrie

Sur les formes quadratiques réelles : loi d'inertie, procédé de Gram-Schmidt

Définition. Soit q une forme quadratique réelle sur un espace vetoriel E. On dit que q est *positive* si

$$^\forall x \in E,\, q(x) \geq 0$$

définie positive si

$$^\forall 0 \neq x \in E,\, q(x) > 0\ .$$

Exemple. La forme quadratique

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, M \mapsto \mathrm{tr} M^2$$

est définie positive sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, espace des matrices symétriques de taille n et définie négative sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, espace des matrices antisymétriques de taille n.

En effet,

$$\mathrm{tr} M^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}M_{ji} = \begin{cases} \sum_{1\leq i,j\leq n} M_{ij}^2 & \text{si } M \text{ est symétrique} \\ -\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{ij}^2 & \text{si } M \text{ est antisymétrique.} \end{cases}$$

Théorème de Sylvester. Soit q une forme quadratique sur E, $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie.

i) Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$[q]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

ii) *(loi d'inertie)* de plus, le nombre de 1 et le nombre de -1 ne dépendent que de q. On les note (r, s).

Démo. Pour la loi d'inertie on remarque que r est la dimension maximale d'un sous-espace F de E où la restriction $q|_E$ est définie positive.

Définition. Le couple (r, s) est la *signature* de q.

Exemple. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique $M \mapsto \mathrm{tr} M^2$ est de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Remarque. Le rang de q est $r + s$.

Proposition. *Procédé de Gram-Schmidt.* Soit q une forme quadratique sur E, $\mathbb{R}-$espace-vectoriel de dimension n. Soit $e_1, ..., e_n$ une base de A. On note A la matrice de q dans la base $e_1, ..., e_n$ et pour tout k, $\delta_k = \text{dét}\, A_k$ où A_k est la matrice de q dans la base $(e_1, ..., e_k)$ †. On suppose que pour tout k, $\delta_k \neq 0$. Alors il existe une unique base $f_1, ..., f_n$ de E, *orthogonale pour* q, telle que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$f_k \in e_k + \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle \ .$$

Démo. On raisonne par récurrence sur $k \geq 1$. On pose $f_1 = e_1$. Si $f_1, ..., f_{k-1}$ sont deux à deux orthogonaux, on remarque que

$$\mathrm{Vect}\{f_1, ..., f_{k-1}\} = \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$$

on cherche donc $f_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} t_i f_i$.

Notons $B_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ la forme polaire de q.

$$^\forall 1 \leq i \leq k-1,\, B_q(f_k, f_i) = 0 \Leftrightarrow {}^\forall i\, B_q(e_k, e_i) + t_i q(f_i) \ .$$

Il faut (*et il suffit*) donc de poser

$$t_i = -\frac{B_q(e_k, f_i)}{q(f_i)}$$

pour peu que $^\forall i$, $q(f_i) \neq 0$. C'est justement le cas car si on note

$$P = [\mathrm{Id}]_{e_1,...,e_{k-1}\,;\,f_1,...,f_{k-1}}$$

la matrice de passage de la base $(e_1, ..., e_{k-1})$ dans la base $(f_1, ...,_{k-1})$, alors P est *triangulaire supérieure avec des* 1 *sur la diagonale* et d'après les formules de changement de base :

$$^tP \underbrace{A_{k-1}}_{=[q]_{e_1,\dots,e_{k-1}}} P = \underbrace{\begin{pmatrix} q(f_1) & & \\ & \ddots & \\ & & q(f_{k-1}) \end{pmatrix}}_{=[q]_{f_1,\dots,f_{k-1}}} \ .$$

†. Ce sont les *mineurs principaux* de la matrice A

En prenant le déterminant, on trouve :

$$\delta_{k-1} = q(f_1)...q(f_{k-1}) \neq 0 \ .$$

Remarque. De plus dans ce cas, on a :

$$q(f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \ .$$

En effet, on a vu aucours de la démonstration que

$$^\forall k,\ q(f_1)...q(f_k) = \delta_k \ ...$$

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(R)$ une matrice symétrique réelle. On suppose que les mineurs $\delta_1, ..., \delta_n$ sont tous non nuls. Alors la forme quadratique associée à A a pour signature $(n-s, s)$ où s est le nombre de changements de signes dans la liste

$$1, \delta_1, ..., \delta_n \ .$$

Exemples.

— *(De l'exercice 9 de la fiche 2 d'algèbre et géométrie)* soit

$$q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_2x_3 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3$$

une forme quadratique sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3. La matrice de q dans la base (e_1, e_2, e_3) est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Donc

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{17}{4},\ \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{115}{8} \ .$$

Cela fait 1 changement de signe ! Donc q a pour signature $(2, \underbrace{1}_{\textit{nombre de changements de signes}})$.

On peut aussi utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale pour q :
soit $f_1 = e_1$. On cherche $f_2 = e_2 + af_1$ orthogonal à f_1

$$\Leftrightarrow B_q(f_2, f_1) = B_q(e_2, f_1) + aq(f_1) = B_q(e_2, e_1) + aq(e_1) = \frac{3}{2} + a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f_2 = e_2 - \frac{3}{2} f_1 = e_2 - \frac{3}{2} e_1 \ .$$

On cherche $f_3 = e_3 + bf_2 + cf_1$ orthogonal à f_1 et f_2

$$\Leftrightarrow B_q(f_3, f_1) = B_q(f_3, f_2) = 0$$

$$\Rightarrow B_q(e_3, f_1) + cq(f_1) = 0 \Rightarrow B_q(e_3, e_1) + cq(e_1) = 0 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow B_q(e_3, f_2) + bq(f_2) = 0 \Rightarrow \underbrace{B_q(e_3, e_2)}_{-3} - \frac{3}{2} \underbrace{B_q(e_3, e_1)}_{1} + b \underbrace{q(f_2)}_{-\frac{17}{4}} = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{18}{17}$$

$$\Rightarrow f_3 = e_3 - \frac{18}{17} e_2 - e_1 \ .$$

— *(De l'exercice 14 de la même feuille) :* la forme quadratique associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est définie positive ! En effet, les mineurs principaux sont :

$$\delta_1 = 1$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

tous > 0.

2 Analyse matricielle

Sur les matrices hermitienes

Notations. Si $X \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{C})$, on pose

$$X^* = {}^t\overline{X} \in \mathscr{M}_{qp}(\mathbb{C}) \ .$$

Si $x, y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\langle x, y\rangle = x^*y \in \mathbb{C}$.

Remarque.

$$^\forall x, y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

$$^\forall 0 \neq x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \langle x, x\rangle > 0$$

$$^\forall x, y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ ^\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \langle x, My\rangle = \langle M^*x, y\rangle \ .$$

Définitions. On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est
— *hermitienne* si $M^* = M$;
— *unitaire* si $M^*M = I_n$ [†] ;
— *normale* si $MM^* = M^*M$.

Notations. L'ensemble des matrices hermitiennes et $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$, celui des matrices unitaires est $\mathscr{U}_n(\mathbb{R})$.

Remarques.
— Soit $M = A + iB$ où $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$M \text{ hermitienne } \Leftrightarrow A \text{ symétrique et } B \text{ antisymétrique} \ .$$

— $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \mathscr{H}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ [‡].
— $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension (réelle) n^2.

†. $\Leftrightarrow MM^* = I_n$
‡. car $M = \frac{M+M^*}{2} + i\frac{M-M^*}{2i}$

Théorème spectral pour les matrices normales Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice normale. Alors il existe $U \in \mathscr{U}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telle que
$$U^* M U = D = U^{-1} D U \ .$$

Remarque. Si M est hermitienne, alors les coefficients diagonaux de D sont réels. Si M est unitaire, alors les coefficients diagonaux de D sont de module 1.

Démo. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. C'est évident pour $n = 1$, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$.

Soit M normale Alors :

$$^\forall x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ |Mx|_2^2 = |M^* x|_2^2$$

en particulier si $Mx = tx$, $t \in \mathbb{C}$, alors $M^* x = \bar{t} x$.

En effet,

$$|Mx|_2^2 = (Mx)^* Mx = x^* M^* M x = x^* M M^* x = (M^* x)^* M^* x = |M^* x|_2^2 \ .$$

Soit t une valeur propre de M. On note $E_t(M) = \ker(M - tI_n)$ l'espace propre associé.

Alors $E_t(M)^{\perp}$ † est stable par M.

En effet, en général $E_t(M)^\perp$ est stable par M^*. Comme M est normale, on a :
$$E_t(M)^\perp = E_{\bar{t}}(M^*)^\perp$$
qui est stable par $(M^*)^* = M$.

Comme $0 \neq E_t(M)$, $\dim E_t(M)^\perp = n - \dim E_t(M) < n$. Par hypothèse de récurrence la restriction de M à $E_t(M)^\perp$ est diagonalisable. Comme $E_t(M) \oplus E_t(M)^\perp = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, M est diagonalisable.

Notons t_i les valeurs propres distinctes de M. Comme M est diagonalisable :
$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \oplus_i E_{t_i}(M) \ .$$

Pour tout i choisissons une base orthonormale ‡ $\mathscr{B}_i$ de $E_{t_i}(M)$.

Si $t \neq t'$, alors $E_t(M) \perp E_{t'}(M)$.

En effet si $x \in E_t(M)$, $x' \in E_{t'}(M)$, alors

$$x^* M x' = t' x^* x' = (M^* x)^* x' = (\bar{t} x)^* x' = t x^* x' \Rightarrow (t' - t) x^* x' = 0$$

$$\Rightarrow x^* x' = 0 \ .$$

†. Si $F \leq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $F^\perp = \{z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \ : \ ^\forall y \in F,\ z^* y = 0\}$. On a $F^\perp \leq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $F \oplus F^\perp = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

‡. pour le produit scalaire hermitien $^\forall x, y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle x, y \rangle = x^* y$

Donc $\mathscr{B}$, réunion des bases $\mathscr{B}_i$ est une base orthonormale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme défini par M est diagonale. Or U, matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathscr{B}$ est unitaire[§]. Donc U^*MU est diagonale.

Corollaires.

a) Si M est symétrique réelle, alors il existe O matrice orthogonale et D matrice diagonale telles que

$$ {}^tOMO = O^{-1}MO = D \ . $$

b) *Inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée.* Soient $v_1, ..., v_n \in E$ un espace hermitien avec un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors la matrice

$$ G(v_1, ..., v_n) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} $$

est de déterminant ≥ 0[†].

c) Sur le rayon spectral. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors

$$ ||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \max_{t \text{ valeur propre de} (A^*A)} t \ . $$

Exemple.

Soit

$$ T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ . $$

La matrice T_n est symétrique donc diagonalisable par une matrice orthogonale :

$$ {}^tOT_nO = D $$

où

$$ O = \sqrt{\frac{2}{n+1}}^{\,n} \left(\sin \frac{kl\pi}{n+1} \right)_{1 \leq k,l \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) $$

§. comme matrice de passage entre deux bases orthonormales !

†. pour $n = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$ \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{vmatrix} = \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - |\langle v_1, v_2 \rangle|^2 \geq 0 $$

et

$$D = \mathrm{diag}(2\cos\frac{\pi}{n+1}, 2\cos\frac{2\pi}{n+1}, ..., 2\cos\frac{n\pi}{n+1})\ .$$

En effet, comme

$$\sin(k-1)\theta + \sin(k+1)\theta = 2\cos\theta\sin k\theta$$

Si $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$, les vecteurs

$$v_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

vérifient $T_n v_\theta = 2\cos\theta v_\theta$.

Cela fait n valeurs propres distinctes et comme T_n est symétrique, les droites propres $\mathbb{R}v_\theta$ sont deux à deux orthogonales. Pour obtenir une base orthonormale de vecteurs propres, il suffit donc de prendre les

$$\frac{v_\theta}{|v_\theta|_2}\ .$$

Or :

$$\begin{aligned} |v_\theta|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\theta &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\cos 2k\theta}{2} \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}Re\left(e^{2i\theta}\frac{1-e^{2in\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right) \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}Re\left(e^{i(n+1)\theta}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right) \\ &= \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\theta}{2}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\ . \end{aligned}$$

Or si $\theta = \frac{l\pi}{n+1}$, on a :

$$\frac{\cos(n+1)\theta}{2}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos l\pi}{2}\frac{\sin\frac{nl\pi}{n+1}}{\sin\frac{l\pi}{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^l}{2}\frac{\sin\left(l\pi - \frac{l\pi}{n+1}\right)}{\sin\frac{l\pi}{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^l}{2}(-1)^{l+1} = -\frac{1}{2} \ .$$

Donc si $\theta = \frac{l\pi}{n+1}$, on a :

$$|v_\theta|_2^2 = \frac{n+1}{2} \ .$$

Par conséquent la matrice :

$$O = \left(\frac{v_{\frac{l\pi}{n+1}}}{|v_{\frac{l\pi}{n+1}}|}\right)_{1\le l\le n} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}^{\,n}\left(\sin\frac{kl\pi}{n+1}\right)_{1\le k,l\le n}$$

est orthogonale !

3 Probabilités

Indépendance

Définition. On dit que deux évènements A, B d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont indépendants si

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) \ .$$

Exercices.

i) Si A, B sont indépendants, alors leurs complémentaires : A^c, B^c aussi.
Solution. $P(A^c \cap B^c) = P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B)$. Or $A\cup B = (A \setminus (A\cap B)) \sqcup (B \setminus A\cap B) \sqcup (A\cap B)$.
Donc $P(A\cup B) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) + P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$. Donc $P(A^c\cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1-P(A))(1-P(B)) = P(A^c)P(B^c)$.

ii) *Exo 1 de la fiche 2 de probabilités.*
Solution. Montrons que A_1, A_2 sont indépendants :
$P(A_1\cap A_2) = P(X = Y = Z)$. Or

$$\{X = Y = Z\} = \{X = Y = Z = 0\} \sqcup \{X = Y = Z = 1\}$$

donc

$$P(A_1\cap A_2) = P(X = Y = Z = 0) + P(X = Y = Z = 1)$$

or,

$$P(X = Y = Z = 0) = P((X = 0) \cap (Y = 0) \cap (Z = 0))$$

$$= P(X = 0)P(Y = 0)P(Z = 0)$$

car les variables aléatoires sont indépendantes ! Donc $P(X = Y = Z = 0) = \frac{1}{2^3}$. De même $P(X = Y = Z = 1) = \frac{1}{2^3}$.
Donc $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$.
Or, $P(A_1) = P(Y = Z) = P(Y = Z = 0) + P(Y = Z = 1) = P((Y = 0) \cap (Z = 0)) + P((Y = 1) \cap (Z = 1)) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$.
De même $P(A_2) = \frac{1}{2}$.
On a donc bien

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4} \ .$$

Pourtant A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants car :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (X = Y = Z) \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

et

$$P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2^3} \neq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \ .$$