COURS DU JEUDI 17 MARS 2022

Algèbre et géométrie

Géométrie affine.

Définition 1

Un *espace affine* est un ensemble $\mathscr{E}$ et un espace vectoriel E avec une application [†]

$$E \times \mathcal{E} \to \mathscr{E}$$

telle que

(i) $^{\forall} x \in \mathscr{E}$, $x + 0 = x$.

(ii) $^{\forall} u, v \in E$, $^{\forall} x \in \mathscr{E}$, $(x+u)+v = x+(u+v)$.

(iii) $^{\forall} x, y \in \mathscr{E}$, $^{\exists}! u \in E$, $x + u = y$ [‡].

Notation. Si $x + u = y$, on note $u = \overrightarrow{xy}$.

Définition 2. Un *espace affine* est un ensemble $\mathscr{E}$ et un espace vectoriel E avec une application

$$\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E,\ (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$$

telle que :

(i) *relation de Chasles* $^{\forall} x, y, z \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$;

(ii) $^{\forall} x \in \mathscr{E}$, $^{\forall} u \in E$, $^{\exists}! y \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{xy} = u$.

Ces deux définitions sont équivalentes ! On dit que $\dim E$ est la dimension de $\mathscr{E}$.

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. Un **sous-espace affine** $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est un seous-ensemble de la forme

$$P + F$$

où $P \in \mathscr{F}$ et $F \leq E$.

On dit que $A_1, ..., A_n \in \mathscr{E}$ sont *affinement indépendants* si les vecteurs

$$\overrightarrow{A_1A_2},\ ...,\ A_1\vec{A}_n$$

sont linéairement indépendants.

†. c'est une action du groupe $(E, +)$ sur l'ensemble $\mathscr{E}$!

‡. on dit que l'action est simplement transitive

Exemple. $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n$, $E = \mathbb{R}^n$, $E \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, $(u, x) \mapsto x + u$. Une intersection de sous-espace affine est un sous-espace affine [§]

Application affine. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est une *application affine* s'il existe $\overrightarrow{f} : E \to F$ linéaire telle que :

$$^\forall M, N \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) \ .$$

Exemple. Si $O \in \mathscr{E}$, si $t \in k$, l'application $h_{O,t} : M \mapsto O + t\overrightarrow{OM}$ est une application affine. C'est l'homothétie de centre O et de rapport t.

Exercice. Si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ et $g : \mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$ sont affines alors $g \circ f$ aussi. De plus,

$$\overrightarrow{gf} = \overrightarrow{g}\,\overrightarrow{f} \ .$$

Exercice. Le théorème de Thalès Exercice 15 fiche 3. Une correction est disponible sur la page du cours d'algèbre et géométrie !

Analyse complexe

Courbure.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe *paramétrée par la longueur d'arcs c-à-d* $^\forall s \in I$, $|\gamma'(s)| = 1$. La *courbure* en s est

$$\kappa(s) = |\gamma''(s)| \ .$$

Le *rayon de courbure* en s est

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \ .$$

Exemple. Calculer la courbure de la courbe définie par

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x, f(x))$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^2$ (exercice 6 de la fiche 5).

Solution. On pose $s(x) = \int_0^x |\gamma'(t)|dt$. Et $\widehat{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$. Alors la courbe $\widehat{\gamma}$ est paramétrée par la longueur d'arcs. De plus :

$$^\forall x,\ \widehat{\gamma}(s(x)) = \gamma(x)$$

$$\Rightarrow \widehat{\gamma}'(s) = \frac{\gamma'(x)}{s'(x)} \,,$$

§. d'où la notion de sous-espace affine engendré.

$$\widehat{\gamma}''(s) = \left(\frac{\gamma'(x)}{s'(x)}\right)' . \frac{1}{s'(x)}$$

$$= \frac{\gamma''(x)}{s'(x)^2} \bmod \mathbb{R}\gamma'(x)$$

Or,

$$|\text{dét}\,(\widehat{\gamma}'(s), \widehat{\gamma}''(s))| = |\widehat{\gamma}'(s)||\widehat{\gamma}''(s)| = |\widehat{\gamma}''(s)|$$

car $\widehat{\gamma}' \perp \widehat{\gamma}''$ donc :

$$\kappa(s) = |\widehat{\gamma}''(s)| = \frac{\text{dét}\,(\gamma'(x), \gamma''(x))}{s'(x)^3}$$

$$= \frac{\text{dét}\,(\gamma'(x), \gamma''(x))}{|\gamma'(x)|^3}$$

$$= \frac{|f''(x)|}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3} \ .$$

analyse matricielle

Valeurs singulières d'une matrice.

Théorème. Soit $M \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_m(\mathbb{R})$, $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients ≥ 0 † telles que :

$$M = PDQ$$

de plus, les coefficients de D sont uniques. (**Définition.**) Ce sont les *valeurs singulières* de M . Plus préciséments ce sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^tMM$ (ou de $M{}^tM$).

Exemple. Exercice 2.2.1 de la fiche 2.

Soit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R}) \ .$$

Trouver $P \in O_2(\mathbb{R})$, $Q_3(\mathbb{R})$, D diagonale à coefficients positifs telles que

$$A = PDQ \ .$$

†. diagonale signifie que $^\forall 1 \leq i \leq m$, $^\forall 1 \leq j \leq n$, $i \neq j \Rightarrow D_{ij} = 0$.

— *D'abord,* on diagonalise A^tA ‡*dansunebaseorthonormée.*

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{36}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{29}{5} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^tA}(X) = X^2 - 13X + 36 = (X-9)(X-4)$$

d'où :

$$A^tA = P \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tP = P \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} {}^tP$$

avec par exemple

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

— On prend donc

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

— Pour trouver Q, on résout :

$$A = PDQ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{pmatrix} = PDQ$$

$$\Leftrightarrow {}^tPA = DQ$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3q_{11} & 3q_{12} & 3q_{13} \\ 2q_{21} & 2q_{22} & 2q_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow q_{11} = 0,\ q_{12} = 1,\ q_{13} = 0$$

$$q_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ q_{22} = 0,\ q_{23} = \frac{1}{2}$$

Il reste à choisir q_{31}, q_{32}, q_{33} pour que Q soit orthogonale.
On peut par exemple prendre

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

‡. plutôt que ${}^tAA$ qui est une matrice 3×3.

Probabilités

Sur les lois exponentielles.

Exercice. Feuille 4 exo 1.

1. $F_x(t) = P(X > t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$.
2. $P(Z > t) = P((X > t) \cap (Y > t)) = P(X > t)P(Y > t)$ car X, Y sont indépendantes.
   Donc $P(Z > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$ donc
   $$P_Z(dx) = (+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}1_{\mathbb{R}_+(x)dx} \ .$$
3. $P(Z = X) = P(X \leq Y) = E(f(X, Y))$ où $f(x, y) = 1$ si $x \leq y$, 0 sinon.
   Or, X, Y sont indépendantes donc :
   $$P(Z = X) = \int (x, y)dxdy$$
   $$= \int_{y \geq 0} \int_{0 \leq x \leq y} \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-muy} dxdy$$
   $$= \int_0^{+\infty} \mu(1 - e^{-\lambda y})e^{-\mu y} dy$$
   $$= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \ .$$
4. $P(S > t) = E(f(X, Y))$ où
   $$f(x, y) = 1 \text{ si } x + y > t, \text{ 0 sinon.}$$
   Comme les variables X, Y sont indépendantes, on a :
   $$P(S > t) = E(f(X, Y)) = \int_{x \geq 0} \int_{y \geq 0} f(x, y)1_{\mathbb{R}_+}(x)1_{\mathbb{R}_+}(y)\lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dxdy$$
   $$= \int_{0 \leq x \leq t} \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_{t-x}^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx + \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx$$
   $$= e^{-\mu t} \int_0^t \lambda e^{(\mu - \lambda)x} dx + \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
   donc si $\mu \neq \lambda$:
   $$P(S > t) = e^{-\mu t} \frac{\lambda}{\mu - \lambda}(e^{(\mu - \lambda)t} - 1) + e^{-\lambda t}$$
   $$= \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu - \lambda}$$
   et si $\mu = \lambda$,
   $$P(S > t) = (\lambda t + 1)e^{-\lambda t} \ .$$