Cours du jeudi 24 mars 2022

Algèbre et géométrie

Barycentres.

Soit $\mathscr{E}$ un $k-$espace affine.

Définition. Soient $A_1, ..., A_n \in \mathscr{E}$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in k$ tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$.

Le point $A + \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$ ne dépend pas de A. C'est le barycentre du système

$$((A_1, \lambda_1), ..., (A_n, \lambda_n)) \ .$$

On le note

$$bar((A_1, \lambda_1), ..., (A_n, \lambda_n)) \ .$$

Exemple. Le milieu de $[A, B]$ est $\mathrm{bar}((A, 1), (B, 1))$.

Remarque. Le point $G = bar((A_1, \lambda_1), ..., (A_n, \lambda_n))$ est l'unique point de $\mathscr{E}$ tel que

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \ .$$

Proposition. *Associativité*

Si $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n \in \mathscr{E}$, si λ_i, μ_j sont des scalaires tels que $0 \neq \sum_i \lambda_i, \sum_j \mu_j, \sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j$, alors

$$\mathrm{bar}((A_1, \lambda_1), ..., (A_m, \lambda_m), (B_1, \mu_1), ..., (B_n, \mu_n))) = \mathrm{bar}((G_A, \sum_i \lambda_i), (G_B, \sum_j \mu_j))$$

où

$$G_A = \mathrm{bar}((A_1, \lambda_1), ...(A_m, \lambda_m)),\ G_B = \mathrm{bar}((B_1, \mu_1), ...(B_m, \mu_n)) \ .$$

Exemple. Les médianes d'un triangle sont concourantes en G, isobarycentre d'icelui !

En effet, si ABC est un triangle, alors :

$$G = bar((A, 1), (B, 1), (C, 1)) = bar((A, 1), (A', 2))$$

où A' est le milieu de $[AB]$. Donc $G \in (AA')$ ...

Lemme. Soient A, B, C trois points affinement indépendants. Les points de coordonnées barycentriques :

$$A_1 = \mathrm{bar}((A, a_1), (B, b_1), (C, c_1)),$$

$$A_2 = \mathrm{bar}((A, a_2), (B, b_2), (C, c_2)),$$

$$A_3 = \mathrm{bar}((A, a_3), (B, b_3), (C, c_3))$$

sont alignés $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Remarque. Plus généralement,

$$\frac{\mathrm{aire}(A_1A_2A_3)}{\mathrm{aire}(ABC)} = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right| \ .$$

En effet, l'aire du triangle $A_1A_2A_3$ est donnée par

$$\mathrm{dét}\,(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) \ .$$

Or, si on suppose $\sum_i a_i = \sum_i b_i = \sum_i c_i = 1$, on a :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{AA_2} - \overrightarrow{AA_1} = b_2\overrightarrow{AB} + c_2\overrightarrow{AC} - b_1\overrightarrow{AB} - c_1\overrightarrow{AC}$$

$$= (b_2 - b_1)\overrightarrow{AB} + (c_2 - c_1)\overrightarrow{AC} \ .$$

De même :

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (b_3 - b_1)\overrightarrow{AB} + (c_3 - c_1)\overrightarrow{AC}$$

donc

$$\mathrm{dét}\,(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) = ((b_2 - b_1)(c_3 - c_1) - (b_3 - b_1)(c_2 - c_1))\mathrm{dét}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ .$$

Or,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$(L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L3)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \\ c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix}$$

$(C_2 \leftarrow C_2 - C_1,\, C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$

$$= (b_2 - b_1)(c_3 - c_1) - (b_3 - b_1)(c_2 - c_1) \ .$$

Soit ABC un triangle. Soient $a, b, c \in k$. On pose :

$$A' = \mathrm{bar}((B,1),(C,a)),\ B' = \mathrm{bar}((C,1),(A,b)),\ C' = \mathrm{bar}((A,1),(C,c))\,.$$

Théorème de Ceva.
Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes $\Leftrightarrow abc = 1$.
Théorème de Ménélaüs.
Les points A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow abc = -1$.
Remarque. plus généralement,

$$\frac{\mathscr{A}}{\mathrm{aire}(ABC)} = \frac{(abc-1)^2}{(1+b+bc)(1+c+ac)(1+a+ab)}$$

où $\mathscr{A}$ est l'aire du triangle formé par les droites $(AA'), (BB'), (CC')$.

Analyse complexe

Rayon de convergence.
Définition. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Le rayon de convergence est

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}} \ .$$

Propriétés.
— La série converge si $|z| < R$, diverge si $|z| > R$.
— La série converge uniformément sur tous les disques compacts contenus dans le disque ouvert $D(0, R)$.
— Si $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = l$ alors $R = l$.
— $R = \sup\{r \geq 0 \ : \ (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$.
Exercices. Feuille 6 numéros 2 et 5

— La série $S = \sum_n n^n z^{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
En effet, $S = \sum_n a_n z^n$ où $a_n = \sqrt{n}^{\sqrt{n}}$ si n est un carré, 0 sinon.
Alors

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_n |a_{n^2}|^{\frac{1}{n^2}}$$
$$= \lim_n n^{\frac{n}{n^2}} = \lim_n \exp \frac{\ln n}{n} = 1 \ .$$

Or,

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{n}^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \exp \frac{\ln \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \to_{n\to\infty} 1$$

donc $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ et $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$.

— Calcul de $\sum_n n^2 z^n$. Le rayon de convergence est 1 car $\lim_n (n^2)^{\frac{1}{n}} = 1$.
En dérivant terme à terme sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, on trouve :

$$\sum_n n^2 z^n = \sum_n n(n-1)z^n + \sum_n nz^n$$
$$= z^2 \sum_n n(n-1)z^{n-2} + z \sum_n nz^{n-1}$$
$$= z^2 \left(\frac{1}{1-z}\right)'' + z \left(\frac{1}{1-z}\right)'$$
$$= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} \ .$$

Analyse matricielle

Décompositions.

Théorème. Décomposition LU. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses mineurs $\Delta_i(A) \neq 0$, alors il existe un unique couple (L, U) où L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux $\neq 0$ telle que :

$$A = LU \ .$$

Exemple.
(Feuille 4, exercice 4.3)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{pmatrix} \ .$$

En ajoutant à chaque ligne i de la matrice A des combinaisons linéaires lignes $1, ..., i-1$, on transforme A en une matrice triangulaire supérieure :

$$A \xrightarrow[L_4-L_1]{L_3-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et

$$L = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{dét}\, L = 1$, on a $\text{dét}\, A = \text{dét}\, U = 24$.

Pour résoudre $AX = b$, on résout d'abord :

$$Lx' = b$$

Puis $Ux = x'$ ...

Théorème. (Décomposition de Cholevski). Si S est symétrique définie positive, alors il existe une unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 telle que

$$S = {}^tTT \ .$$

Démonstration. Il suffit de définir T par récurrence.

On pose :

$$^\forall i \leq j,\ t_{ii} = \sqrt{S_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}$$

$$t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}\left(S_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}\right) \ .$$

Exemples. (Feuille 4, exercice 4.5)

La matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

est définie positive car ses mineurs principaux sont > 0 :

$$\Delta_1 = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 36,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{vmatrix} = 36.16 \ .$$

On pose alors

$$t_{11} = \sqrt{A_{11}} = 2$$

$$t_{12} = \frac{1}{t_{11}} A_{12} = 1,\ t_{13} = \frac{1}{t_{11}} A_{13} = 1$$

$$t_{22} = \sqrt{A_{22} - t_{12}^2} = \sqrt{10 - 1} = 3$$

$$t_{23} = \frac{1}{t_{22}}(A_{23} - t_{12}t_{23}) = \frac{1}{3}(7 - 1.1) = 2$$

$$t_{33} = \sqrt{A_{33} - t_{13}^2 - t_{23}^2} = \sqrt{21 - 1 - 4} = 4$$

et bien entendu

$$^\forall i > j,\ t_{ij} = 0 \ .$$

Donc
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Application. **Inégalité d'Hadamard.** Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$$|\text{dét}\, A| \leq \prod_i |C_i|_2$$
où les C_i sont les colonnes de A.

Démonstration. Si dét $A = 0$, c'est évident, sinon dét $A \neq 0 \Rightarrow$
$${}^t AA$$
symétrique *définie positive.* Donc d'après la décomposition de Cholevski, il exste T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 telle que
$${}^t AA = {}^t TT$$
$$\text{dét}\,^2 A = \text{dét}\,^2 T = \prod_{i=1}^n t_{ii}^2 \ .$$

Or, on a :
$$\forall 1 \leq i \leq n,\, t_{ii}^2 = ({}^t AA)_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2$$
$$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n,\, t_{ii}^2 \leq {}^t AA)_{ii}$$
$$= \sum_{k=1}^n A_{ki}^2 = |C_i|^2$$
d'où dét $^2 A \leq \prod_{i=1}^n |C_i|^2$. *Qed.*