COURS DU JEUDI 31 MARS 2022

Algèbre et géométrie

Coniques.

Définition. une conique est une courbe dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Classification.

Soit $\mathscr{C}$ une conique d'équation

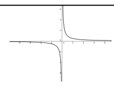
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

alors $\mathscr{C}$ est soit vide, soit un point, soit deux droites sécantes, soit une droite double soit deux droites parallèles soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.

Plus précisément, il existe une bijection affine

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (X, Y)$$

telle que :

signature de $ax^2 + bxy + cy^2$	équation réduite	nature	allure
$(2,0)$ ou $(0,2)$	$X^2 + Y^2 = 1$	ellipse	
	$X^2 + Y^2 = -1$	vide	
	$X^2 + Y^2 = 0$	point	
$(1,1)$	$XY = 1$	hyperbole	
	$XY = 0$	droites sécantes	
$(1,0)$ ou $(0,1)$	$X^2 = Y$	parabole	
	$X^2 = 0$	droite double	
	$X^2 = -1$	vide	
	$X^2 = 1$	droites parallèles	

Exemples. Feuille sur les coniques, exercice 1

Analyse complexe

Fonctions holomorphes.

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que f est *holomorphe* sur U si :

$$\forall z_0 \in U,\ \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f z_0)}{z - z_0}$$

existe. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite.

Exemples. Les polynômes, les séries entières sur le disque ouvert de convergence.

Contre-exemples. $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto |z|^2$.

Conditions de Cauchy-Riemann. Soit $f : U \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction où P, Q sont des fonctions réelles.

Alors f est holomorphe sur $U \Leftrightarrow$

$$^{\forall} z_0 = x_0 + iy_0 \in U,\ P, Q \text{ sont différentiables en } (x_0, y_0) \text{ et}$$

$$\partial_x P|_{z_0} = \partial_y Q|_{z_0},\ \partial_y P|_{z_0} = -\partial_x Q|_{z_0} \ .$$

Remarque. Dans ce cas, $f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = -i\partial_y f(z_0)$.

Détermination principale du logarithme. On pose

$$^{\forall} r > 0,\ ^{\forall} - \pi < t\pi,\ \mathrm{Log}(re^{it} = \ln r + it$$

c'est défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Remarque.

$$^{\forall}|z| < 1,\ \mathrm{Log}(1 + z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \ .$$

Intégrale le long d'un chemin. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin continu, si f est continue sur un ouvert contenant $\gamma([a, b])$, on pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \ .$$

Indice d'un point par rapport à un lacet. Pour tout lacet γ †, pour tout $z_0 \notin \mathrm{Im}\gamma$, on pose :

$$\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \ .$$

C'est un entier !

†. Un lacet est un chemin continu $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Analyse matricielle

Norme et conditionnement.

Soit $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et soit $||\cdot||$ la norme induite sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Conditionnement. On pose $\mathrm{cond}(A) = ||A||||A^{-1}||$ pour toute matrice A inversible.

Propriétés.

i) $^\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $||A|| \geq 1$;

ii) $^\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $^\forall 0 \neq t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cond}(tA) = \mathrm{cond} A$;

iii) $^\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{cond}(AB) \leq \mathrm{cond}(A)\mathrm{cond}(B)$;

iv) $^\forall A$ symétrique définie positive, $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ où $\lambda_1 \leq .... \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

Exercice. Feuille 2, exo 2.8

Probabilités

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que

— $\lim X_n = X$p.s.[†] s'il existe $N \in \mathscr{A}$ tel que $P(N) = 0$ et $^\forall \omega \notin N$, $\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$.

— $\lim X_n = X$ *en probabilités* si

$$^\forall \epsilon > 0, \lim_n P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0 \ .$$

Proposition.

i) $\lim_n X_n = X$ p.s. $\Leftrightarrow$

$$^\forall \epsilon > 0, \lim_n P(\sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \epsilon) = 0 \ .$$

ii) $\lim_n X_n = X$ p. s. $\Rightarrow \lim_n X_n = X$ *en probabilités.*

iii) Si $^\forall \epsilon > 0$, $\sum_n P(|X_n - X| \geq \epsilon) < +\infty$, alors $\lim_n X_n = X$ p. s.

†. presque sûrement