COURS DU JEUDI 7 AVRIL 2022

Algèbre et géométrie

Anneaux et corps.

Définition. Un *anneau* $(A, +, \cdot)$ est un ensemble A avec deux opérations :

$$A \times A \to A,\ x, y \mapsto x + y\ ,\ A \times A \to A,\ x, y \mapsto x \cdot y$$

telles que :
— $(A, +)$ est un groupe abélien ;
— $^\exists 1 \in A,\ ^\forall x \in A,\ x.1 = 1.x = x$;
— $^\forall x, y, z \in A,\ (x.y).z = x.(y.z)$;
— $^\forall x, y, z \in A,\ x.(y + z) = x.y + x.z,\ (x + y).z = x.z + y.z.$

Exemples. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $A = \{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^k}{k!} : n \in \mathbb{N},\ ^\forall k,\ a_k \in \mathbb{Z}\}$.

Définition. Soit A un anneau, on dit que $a \in A$ est inversible s'il existe $b \in A$ tel que $ab = ba = 1$. L'élément b est alors unique et on le note a^{-1}.

L'ensemble des éléments inversibles est noté $A^\times$. Avec ., $(A^\times, \times)$ est un groupe. Si $a, b \in A$, on dit que a, b sont *associés* s'il existe $u \in A^\times$ tel que $a = ub$.

Exercices. $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$, $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$, $\mathbb{Z}[j]^\times = \{\pm 1, \pm j, \pm(1+j)\}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1 + \sqrt{2})^n\ :\ n \in \mathbb{Z}\}$, $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1, \pm 5\}$.

DANS LA SUITE LES ANNEAUX A CONSIDÉRÉS SERONT COMMUTATIFS : *i.e.*

$$^\forall x, y \in A,\ xy = yx\ .$$

Définition. Un corps est un anneau K tel que $K^\times = K \setminus \{0\}$.

Exemples. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier, $\mathbb{Z}[j]/2$, $\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\ :\ a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$.

Définition. Soit A un anneau. On dit que A est intègre si :

$$^\forall 0 \neq a, b \in A,\ ab = 0 \Rightarrow ab \neq 0\ .$$

Construction d'anneaux : les polynômes

Soit A un anneau. On pose

$$A[[X]] = A^{\mathbb{N}},\ A[X] = A^{(\mathbb{N})}$$

l'ensemble des suites à coefficients dans A et l'ensemble des suites à coefficients dans A nulles à partir d'un certain rang.

On notera $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

On pose :

$$\sum_n a_n X^n \sum_n b_n X^n = \sum_n c_n X^n$$

où

$$^\forall n \geq 0,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

et la somme *termes à termes.*

Alors pour ces opérations, $A[[X]]$ est un anneau et $A[X]$ un sous-anneau.

Analyse complexe

Théorème de Goursat.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $z_0 \in \Omega$. On suppose f continue sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, continue sur Ω. Soit $\Delta \subseteq \Omega$ un triangle. Alors :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Primitives. Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in \Omega$. Soit f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{x_0\}$, alors f admet une primitive sur Ω.

Exemple. La détermination principale du logarithme est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$: c'est

$$\int_{[1,z]} \frac{du}{u}\ .$$

En déduire $\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz$.

Formules de Cauchy. Soit ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Soit γ un lacet dans Ω. Si f est holomorphe sur Ω, alors pour tout n, $f^{(n)}$ existe et est holomorphe et on a :

$$^\forall z \in \Omega,\ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du\ .$$

it Remarque. En particulier si f est continue sur un ouvert Ω et continue sur $\Omega \setminus \{x_0\}$, alors f est holomorphe sur Ω.

Analyse matricielle

Décomposition QR

Matrices de Householder.

Soit $0 \neq v \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Alors la matrice :

$$H(v) = I_n - 2\frac{v^t v}{{}^t v v}$$

est une réflexion orthogonale.

Proposition. Si $v, e \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ sont des vecteurs non colinéaires, alors :

$$H(v + |v|e).v = -|v|e,$$

$$H(v - |v|e).v = |v|e \ .$$

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale $O \in \mathscr{O}_m(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$, à coefficients diagonanux ≥ 0, telles que :

$$A = QR \ .$$

Remarque. Si on connaît les colonnes de la matrice $O = (u_1|...|u_m)$, alors ${}^\forall i \leq j$, $R_{ij} = \langle A_j, u_i \rangle$.

Exemples. Exercice 4.7 de la feuille 4 avec la méthode de Gram-Schmidt ou de Househölder.