Cours du jeudi 14 avril 2022

Algèbre et géométrie

Quotient par un idéal.
Opérations dans l'anneau quotient A/I.
Exemples. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[X]/p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$.
Anneaux principaux
Définition. Un anneau principal est un anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux.
Exemples. $\mathbb{Z}, K[X], \mathbb{Z}[i]$
Contre-exemples. $\mathbb{Z}[X], \mathbb{R}[X,Y]$.
Irréductibles.
Proposition. Principal $\Rightarrow$ factoriel.
Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$
Critère de la réduction modulo p, critère d'Eisenstein.
Exemples. Exercice 20
Contenu d'un polynôme, lemme de Gauss.
Soit $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, on pose

$$c(P) = (a_0, ..., a_n) \ .$$

Lemme de Gauss. Si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors

$$c(PQ) = c(P)c(Q) \ .$$

Analyse complexe

Applications des formules de Cauchy

$$f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}du \ .$$

Exemple. Exercice 5, feuille 9
Inégalité de Cauchy.

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\mathcal{C}(z_0,r)} |f| \ .$$

Liouville. Toute fonction entière bornée est constante.
Application. Tout polynôme non constant a une racine.

Analyticité des fonctions holomorphes.

Théorème. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Alors pour tout $z_0 \in U$, si $D(z_0, R) \subseteq U$, f est analytique au voisinage de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$$

où la série $\sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence $\geq R$.

Analyse matricielle

Décomposition QR

Matrices de Househölder.

Soit $0 \neq v \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Alors la matrice :

$$H(v) = I_n - 2\frac{v^t v}{{}^t v v}$$

est une réflexion orthogonale.

Proposition. Si $v, e \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ sont des vecteurs non colinéaires, alors :

$$H(v + |v|e).v = -|v|e,$$

$$H(v - |v|e).v = |v|e \ .$$

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale $O \in \mathscr{O}_m(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$, à coefficients diagonanux ≥ 0, telles que :

$$A = QR \ .$$

Remarque. Si on connaît les colonnes de la matrice $O = (u_1|...|u_m)$, alors ${}^\forall i \leq j$, $R_{ij} = \langle A_j, u_i \rangle$.

Exemples. Exercice 4.7 de la feuille 4 avec la méthode de Gram-Schmidt ou de Househölder.