Université Claude Bernard Lyon 1
Semestre de printemps 2021-22

Algèbre et Géométrie
L3 MGA

Examen 1 – Durée 180 min – le mercredi 25 mai 2022

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** *ne permettront pas d'obtenir tous les points.*
L'énoncé comporte 5 exercices.

Exercice 1. Une forme quadratique.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la signature de la forme quadratique associée à la matrice A.
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D avec des coefficients ± 1 telles que :
$$^tPAP = D.$$

Exercice 2. Géométrie affine.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$ de direction E. Une application affine $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est appelée symétrie si $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Elle est dite centrale de centre I si I est son unique point fixe.

(I) Soit Γ l'ensemble des applications affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telles que $\overrightarrow{f} \in \{\mathrm{Id}_E,\ -\mathrm{Id}_E\}$.

1. Montrer que Γ est un sous-groupe du groupe affine de $\mathcal{E}$ et que Γ est la réunion des translations et des symétries centrales de $\mathcal{E}$.
2. Soient f, g deux symétries centrales de centres respectifs A et B. Montrer que $g \circ f$ est une translation et donner le vecteur de cette translation en fonction de A et B.
3. Soit s une symétrie centrale de centre A et t une translation de vecteur u. Justifier que $s \circ t$ et $t \circ s$ sont des symétries centrales et donner leur centre en fonction de A et u. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que s et t commutent.

(II) Soient $P_1, \cdots P_n$, n points de l'espace affine $\mathcal{E}$. On se pose le problème suivant :
Peut-on trouver n points $M_1, \ldots, M_n$ de $\mathcal{E}$ tels que pour tout $i \leq n-1$, P_i soit le milieu du segment $[M_i, M_{i+1}]$ et P_n le milieu du segment $[M_n, M_1]$?
Voici une manière de répondre. Soit s_i la symétrie de centre P_i.

1. En supposant le problème résolu, montrer que pour tout $i \geq 2$, $M_i = s_{i-1} \circ s_{i-2} \circ \cdots \circ s_1(M_1)$.
2. En déduire que le problème admet une solution si et seulement si $s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1$ admet un point fixe.
3. Montrer que si n est impair alors il y a une solution unique au problème.
4. Si n est pair, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une solution. Est-elle unique ?
5. Illustration sur $E = \mathbb{R}^2$: Faire la construction explicite pour $P_1 = (-1, 1), P_2 = (0, 1/2), P_3 = (1, 1), P_4 = (1, -1), P_5 = (-1, -1)$.
6. Montrer que pour que quatre points soient les milieux des côtés d'un quadrilatère il faut et il suffit qu'ils soient les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 3. Polynômes irréductibles.

Soit $P(X) = X^3 - 3X + 1$.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $2\cos\frac{2\pi}{9}$ est racine de P. *Indication.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
3. Quel est la dimension du corps $\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right)$ comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$? En donner une base.

Exercice 4. Idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

1. Soit $\mathbb{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles.
   Montrer que la famille $\left(\frac{1}{X-z}\right)_{z\in\mathbb{C}}$ est libre.
2. Soit $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ l'anneau des polynômes en n variables avec $n \in \mathbb{N}$ non nul.
   Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombre complexes. Montrer que $(X - a_1, \dots, X - a_n)$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.
   On se propose de montrer que tout idéal maximal est de ce type.
3. Ecrire $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ comme une réunion dénombrable d'espaces vectoriels de dimension finie.
4. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$ est une réunion dénombrable d'espaces vectoriels de dimension finie.
5. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi_i : & \mathbb{C}[X_i] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{M} \\ & P & \longmapsto & P + \mathcal{M} \end{array}$$

   On suppose que ϕ_i est injectif.
6. Montrer que ϕ_i s'étend alors en un morphisme injectif de $\mathbb{C}(X_i)$ dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{M}$.
7. En utilisant les questions 1 et 3 aboutir à une contradiction.
   On suppose désormais que $\mathrm{Ker}(\phi_i) = (P_i)$ *avec P_i polynôme unitaire.*
8. Montrer que le degré de P_i vaut 1.
   On écrit $P_i = X - z_i$ avec $z_i \in \mathbb{C}$.
9. Montrer que $\mathcal{M} = (X - z_1, \dots, X - z_n)$.

Exercice 5. Un anneau
Soit $A = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. L'élément $1 + \sqrt{2}$ est-il inversible dans A ?
3. Montrer que l'application
$$N : A \to \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} \longmapsto a^2 - 2b^2$$
   (si $a, b \in \mathbb{Z}$) est multiplicative. En déduire que si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors :
$$a + b\sqrt{2} \in A^\times \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = \pm 1.$$
4. Soient $a, b \in \mathbb{F}_3$. Montrer que
$$a^2 - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$
   En déduire que le quotient
$$K = A/(3)$$
   est un corps. Quel est son cardinal ?
5. Montrer que l'élément $1 + \sqrt{2} \mod 3$ engendre le groupe des inversibles $K^\times$.
6. Montrer que l'idéal $(3, X^2 - 2)$ de $\mathbb{Z}[X]$ est maximal. Est-il principal ?
7. Déterminer les polynômes unitaires irréductibles de degré 2 sur le corps $\mathbb{F}_3$.
   En déduire la factorisation de $X^9 - X$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{F}_3$.
8. Montrer que pour chaque polynôme P de degré 2 irréductible sur $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_3[X]/(P) \simeq K$.