Contrôle partiel: durée 2 heure 30. REDIGER LES EXERCICES DANS L'ORDRE QUITTE A LAISSER UN TROU ET REVENIR DESSUS PLUS TARD SVP. REDIGER LES PARTIES 1 ET 2 SUR 2 COPIES SEPAREES.

PARTIE 1

Exercice 1. (4 pts) On admet que la quantité définie pour tout $f \in C^2([0,2])$ par

$$\|f\| := \sup_{t\in[0,2]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,2]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,2]} |f''(t)|$$

fournit une norme sur $C^2([0,1])$.
Montrer que la fonction $G : (C^2([0,2]), \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(f) = f(1)f''(1) + \int_0^2 f'^2(t)dt,$$

est différentiable sur l'ensemble de son domaine de définition, et calculer sa différentielle.

Exercice 2. (4 pts) Etudier la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction donnée en dehors de l'origine par

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

et prolongée par continuité en $(0,0)$. Cette fonction est-elle de classe C^1 ?

Exercice 3. (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x-y, x^2+y)$. La fonction f est-elle inversible au voisinage de 0 ? Globalement sur $\mathbb{R}^2$?

REDIGER LA PARTIE SUIVANTE SUR UNE COPIE SEPAREE DE LA PREMIERE.

PARTIE 2

Exercice 4. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 \exp(x^2y^2) - x^2$. Soient x_0 et y_0 des réels tels que $f(x_0,y_0) = 0$. Montrer qu'au voisinage de (x_0,y_0), l'ensemble des solutions $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $f(x,y) = 0$ coïncide avec le graphe d'une fonction de x si et seulement si $x_0 \neq 0$.

Exercice 5. (4 pts) On considère une arche de cycloïde, définie par la courbe paramétrée

$$\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \in \mathbb{R}^2, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Calculer la longueur de γ, et sa courbure en tout point régulier.
Indication : On pourra utiliser la formule $1 - \cos(\theta) = 2\sin(\theta/2)^2$.

Exercice 6. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application valant 0 et différentiable à l'origine, et positive sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est sous-linéaire au voisinage de 0, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \|v\| \leq \delta \Rightarrow |f(v)| \leq \epsilon\|v\|.$$

On pourra éventuellement commencer par traiter le cas $n = 1$, en se rappelant qu'alors f est différentiable en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0.