

COURS DU JEUDI 2 FÉVRIER 2023

Géométrie

Soit K un corps (par exemple $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier), $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Définitions.

Un *espace affine* est un triplet $(\mathcal{E}, E, +)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble, E un K -espace vectoriel, $+: \mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$, $(x, u) \mapsto x + u$ une action *simplement transitive* du groupe $(E, +)$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ [†].

Notation. On pose $\forall x, y \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{xy} \in E$ tel que $x + \overrightarrow{xy} = y$.

Remarque. $\forall x, y, z \in \mathcal{E}$, dans l'espace vectoriel E , $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ et $-\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{yx}$.

Exemples.

- $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, $E = \mathbb{R}^n$, avec l'addition usuelle de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{E} = \{*\}$ un singleton, $E = 0$ et $+$ la seule application possible $\{*\} \times 0 \rightarrow \{*\}$.
- $\mathcal{E} = \emptyset$ et E un espace vectoriel quelconque.
- Une intersection d'espaces affines est encore un espace affine.
- Une droite est un sous-espace affine de dimension 1. Si $A \neq B \in \mathcal{E}$, K -espace affine, on note $(AB) = A + K\overrightarrow{AB}$ la droite *engendrée* par A, B .

Si $(\mathcal{E}, E, +)$ est un K -espace affine non vide la *dimension* de $\mathcal{E}$ est $\dim_K E$.

Soit $(\mathcal{E}, E, +)$ un K -espace affine. On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un *sous- K -espace affine* si $\mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} = x + F$ pour un certain $x \in \mathcal{F}$, $F \leq E$ (sous- K -espace vectoriel.) La *direction* de $\mathcal{F}$ est le sous-espace vectoriel F , noté $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Exemple. La droite d'équation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = 0\} = (1, 0) + \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$.

Soient $(\mathcal{E}, E, +)$, $(\mathcal{F}, F, +)$ deux espaces affines. Une *application affine* est une fonction $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que :

$$\exists \overrightarrow{f} \in \mathcal{L}(E, F), \forall x, y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) .$$

L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ est la *partie linéaire* de f .

Exemples.

- Les fonctions constantes.

[†]. c-à-d $\forall x, y \in \mathcal{E}, \forall u, v \in E, x + 0 = x, (x + u) + v = x + (u + v), \forall x, y \in \mathcal{E}, \exists ! u \in E, x + u = y$

- b) Les translations $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $x \mapsto x + \vec{u}$, si $\vec{u} \in E$ fixé.[‡]
- c) L'homothétie de centre $O \in \mathcal{E}$ est de rapport $t \in K$: $h_{O,t} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $x \mapsto O + t\overrightarrow{Ox}$.[§]

Exercice.

- 1) Si f, g sont des applications affines alors $f \circ g$ aussi et $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ (pour peu qu'on puisse composer).
- 2) $\forall O, O' \in \mathcal{E}$, $\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $h_{O,t} \circ h_{O',t'}$ est une homothétie ou une translation.

Soit $(\mathcal{E}, E, +)$ un espace affine. On dit que les n points $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ sont affinement indépendants si les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n} \in E$ sont linéairement indépendants.[†]

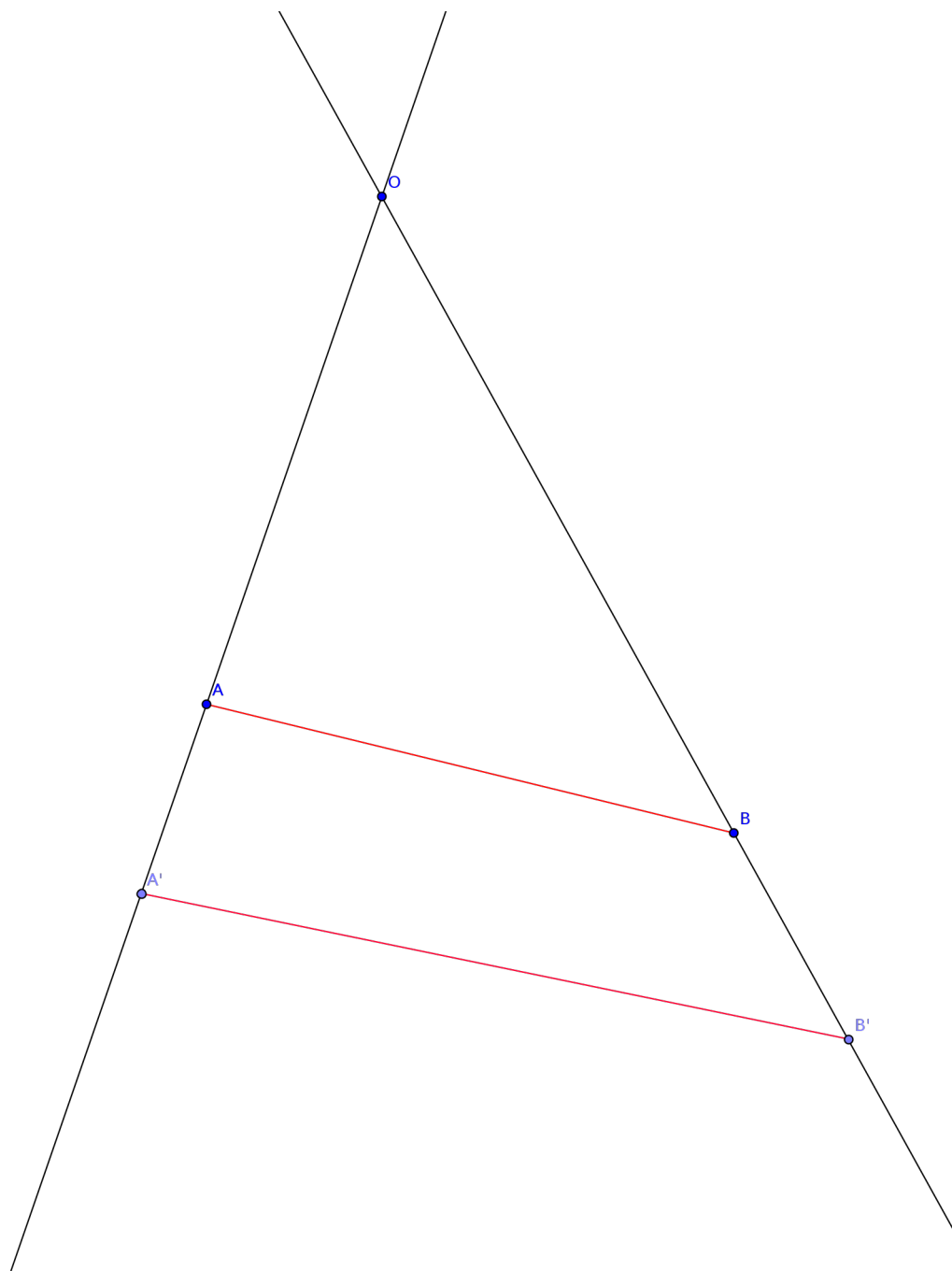
Théorèmes.

Théorème de Thalès.

‡. c'est l'identité si $\vec{u} = 0$, c'est sans point fixe si $\vec{u} \neq 0$.

§. $\overrightarrow{h_{O,t}} = t\text{Id}_E$. Si $t \neq 1$, $h_{O,t}$ a un seul point fixe ($= O$), et $h_{O,1} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

†. $(\forall 1 \leq i \leq n) \Leftrightarrow$ les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$, $1 \leq j \neq i \leq n$ sont linéairement indépendants.



Soient O, A, B trois points affinement indépendants d'un K -espace affine. On suppose que $A' \in (OA)$ et $B' \in (OB)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$;
- (ii) il existe une homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$ et $h(B) =$

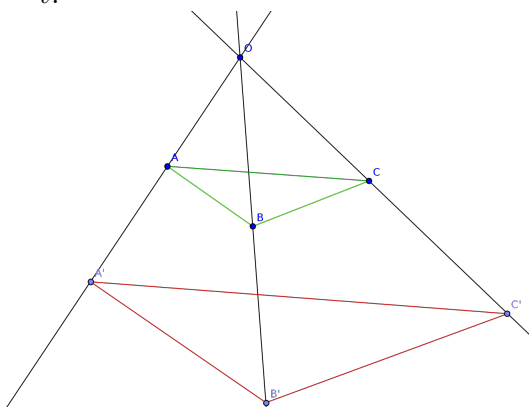
B' ;

(iii) $(AB) // (A'B')^\dagger$.

Démo. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $t = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$, soit $h = h_{O,t}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $h((AB)) = (A'B')$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soient $x = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$, $y = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$. Alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = y\overrightarrow{OB} - x\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Comme O, A, B sont affinement indépendants, $y = x = t$.



Théorème de Desargues.

Soient

A, B, C, A', B', C' deux triangles dans un plan affine. On suppose que les côtés sont parallèles deux à deux : $(AB) // (A'B')$, $(AC) // (A'C')$, $(BC) // (B'C')$. Alors les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes ou parallèles.

Démo. **Dans le cas où (AA') , (BB') s'intersectent en un point O .**

D'après le théorème de Thalès, il existe une homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$.

Comme h est une homothétie, $h((AC)) =$ une droite passant par $A' = h(A)$ et parallèle à (AC) . Donc $h((AC)) = (A'C')$. De même $h((BC)) = h((B'C'))$.

Or $C \in (AC) \cap (BC) \Rightarrow h(C) \in (A'C') \cap (B'C') \Rightarrow h(C) = C'$.

Donc O, C, C' sont alignés et les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en O .

Analyse complexe

Rayon de convergence.

Définition. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ est $R = \sup\{r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \in [0, +\infty]$.

Formules. $R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

$\dagger$. c-à-d $\overrightarrow{A'B'} \in K\overrightarrow{AB}$.

Si $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ existe, alors $R = \frac{1}{l}$.

Propriétés. $\forall |z| < R$, $\sum_n |a_n| |z|^n$ converge, $\forall |z| > R$, $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement.

Produit. Soient $\sum_n a_n X^n$ et $\sum_n b_n X^n$ deux séries de rayon de convergence R, R' . Alors la série produit $\sum_n c_n X^n$ † a un rayon $\geq \min\{R, R'\}$.

Inverse. Si $\sum_n a_n X^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, si $a_0 \neq 0$, on définit par récurrence : $b_0 = \frac{a_0}{a_0}$, $\forall n \geq 1$, $b_n = -\frac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)$. La série $\sum_n b_n X^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et on a

$$\forall |z| < \min\{R, R_1\}, \sum_n b_n z^n = \frac{1}{\sum_n a_n z^n}.$$

Exemples.

a) $\cos z = \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ est de rayon $+\infty$ et $\frac{1}{\cos z}$ de rayon $\frac{\pi}{2}$.

b) $\sum_n z^n$ a pour rayon 1 et $\sum_n \frac{1}{z^n} = 1 - z$ a pour rayon $+\infty$.

Dérivations. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$. alors la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1} z^n$ a le même rayon et pour tout $|z_0| < R$,

$$S'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z_0 \neq z \in \mathbb{C}}} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$$

existe.

En particulier $\sum_n a_n x^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$, $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Quelques séries à connaître.

a) $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$, rayon $+\infty$.

b) $\cos z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, rayon $+\infty$.

c) $\sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

d) $-\ln(1-z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1}$, rayon 1.

e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Fonctions holomorphes

Définition. Soit $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en $z_0 \in U$ si $f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z_0 \neq z \in \mathbb{C}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe en tout $z_0 \in U$, on dit que f est holomorphe sur U .

†. $\forall n$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

Exemples. Les polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Une série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est holomorphe sur le disque ouvert $\bar{D}(0, R) = \{|z| < R\}$.

Contre-exemple. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe en z_0 .[‡]

Remarque. Si f, g sont holomorphes e z_0 , alors fg et $\frac{f}{g}$ aussi (si $g(z_0) \neq 0$).

Critère de Cauchy-Riemann. Théorème. Soit $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où U ouvert. On pose $\forall x + iy \in U$, $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où P, Q sont des fonctions réelles.

Alors f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U \Leftrightarrow P, Q$ sont différentiables[†] en (x_0, y_0) et $\begin{cases} \partial_x P(x_0, y_0) = \partial_y Q(x_0, y_0) \\ \partial_y P(x_0, y_0) = -\partial_x Q(x_0, y_0) \end{cases}$

Exercice. **Détermination principale du logarithme.**

Soit $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \begin{cases} \ln |z| + i \arccos \frac{\text{Re} z}{|z|} & \text{si } \text{Im } z \geq 0 \\ \ln |z| - i \arccos \frac{\text{Re} z}{|z|} & \text{si } \text{Im } z \leq 0 \end{cases}$

Alors Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. De plus : $\forall r > 0, \forall -\pi < t < \pi$, $\text{Log}(re^{it}) = \ln r + it$. Et

$$\forall |z| < 1, -\text{Log}(1 - z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

Calcul différentiel

Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n$ (ouvert) $\rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire telle que :

$$f(a + h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|)$$

(pour une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$).

Notation. L'application linéaire l ne dépend que de f et a , on la note $l =: df_a$. C'est la *différentielle* de f en a .

Dérivée selon un vecteur. Soit $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable en a le long du vecteur v si

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}^m$.

‡. En effet, $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z_0 \neq z \in z_0 + \mathbb{R}}} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z_0 \neq z \in z_0 + i\mathbb{R}}} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}.$

†. voir le cours de calcul différentiel

Remarque. Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a le long de v et $\partial_v f(a) = df_a(v)$.

Exercice. Soit $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Alors f est dérivable en $(0, 0)$ selon tout vecteur $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.