

Cours du jeudi 23 février

Géométrie

Barycentres

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace affine.

définition. Soient $A_1, \dots, A_m \in E$,

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $0 \neq \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

Alors il existe un unique $G \in E$ tel que

$$\lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

remarque. Si $A \in E$, alors $G = A + \frac{\lambda_1 \overrightarrow{AA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{AA_n}}{\sum \lambda_i}$

Notation. $G = \text{bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$

a) si A, B, C sont alignés 
(si $B \neq C$) alors $B = \text{bar}((C, 1), (A, \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}}))$

(en effet si $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{BA} = \vec{0}$)

b) Réciproquement si $B = \text{bar}((C, \lambda), (A, \mu))$ alors A, B, C alignés.

Propriété ASSOCIATIVITÉ

Soient $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \in E$

$\mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

tel que $\sum \mu_i, \sum \lambda_j, \sum \mu_i + \sum \lambda_j \neq 0$

$$\text{Alors } G = \text{bar}(\underbrace{(A_1, \mu_1), \dots, (A_m, \mu_m)}_{G_A}, \underbrace{(B_1, \lambda_1), \dots, (B_n, \lambda_n)}_{G_B})$$

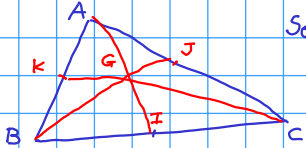
$$= \text{bar}((G_A, \mu_1 + \dots + \mu_m), (G_B, \lambda_1 + \dots + \lambda_n))$$

$$\text{Démonstration. } \mu_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \mu_m \overrightarrow{GA_m} + \lambda_1 \overrightarrow{GB_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{GB_n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\mu_1 + \dots + \mu_m}_{\overrightarrow{GA_A} + \overrightarrow{GA_A}}) \overrightarrow{GA_A} + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \overrightarrow{GB_B} + \underbrace{\mu_1 \overrightarrow{GA_A A_1} + \dots + \mu_m \overrightarrow{GA_A A_m}}_{\vec{0}} + \underbrace{\lambda_1 \overrightarrow{GB_B B_1} + \dots}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Exemples 1)

$I = \text{milieu de } [BC]$
 $J = \text{milieu de } [AC]$
 $K = \text{milieu de } [AB]$



Soit $G = \text{Ban}((A,1), (B,1), (C,1))$

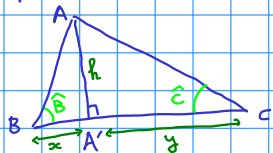
Par associativité $G = \text{Ban}((A,1), (I,2)) \Rightarrow G \in (AI)$

$G = \text{Ban}((B,1), (J,2)) \Rightarrow G \in (BJ)$

$G = \text{Ban}((C,1), (K,2)) \Rightarrow G \in (CK)$

les médianes sont concourantes.

b)



$A' = \text{Ban}((C,1), (B, \frac{y}{x}))$

$$\frac{y}{x} = \frac{y/R}{x/R} = \frac{\cotan \hat{C}}{\cotan \hat{B}}$$

$$\Rightarrow A' = \text{Ban}((C, \cotan \hat{B}), (B, \cotan \hat{C})) = \text{Ban}((B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C}))$$

de même les pieds des autres hauteurs sont $B' = \text{Ban}((A, \cotan \hat{C}), (C, \cotan \hat{A}))$

$C' = \text{Ban}((A, \cotan \hat{B}), (B, \cotan \hat{A}))$

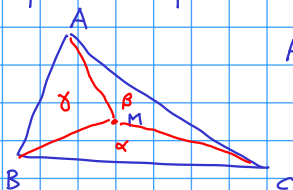
$$\text{Soit } H = \text{Ban}((A, \tan \hat{A}), (B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C})) \Rightarrow H \in (AA')$$

Remarque. $\forall t \neq 0 \text{ Ban}((A, t\lambda_1), \dots, (A_n, t\lambda_n)) = \text{Ban}((A, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$

De même $H \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$

L'orthocentre $H = \text{Ban}((A, \tan \hat{A}), (B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C}))$

Coordonnées barycentriques d'un point $M \in \text{triangle } (ABC)$



A, B, C affinement indépendants
 $(\vec{AB}, \vec{AC})$ non colinéaires

$$M = \text{Ban}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) \quad \text{où } \alpha = \text{aire}(\vec{MB}, \vec{MC})$$

$$\beta = \text{aire}(\vec{MC}, \vec{MA})$$

$$\gamma = \text{aire}(\vec{MA}, \vec{MB})$$

$$= \det_{(\vec{AB}, \vec{AC})}(\vec{MB}, \vec{MC})$$

démo. $M = \text{Ban}((A, x), (B, y), (C, z))$

pour certains x, y, z

avec $x+y+z=1$

$$(x+y+z) \vec{AM} = x \vec{AA} + y \vec{AB} + z \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = y \vec{AB} + z \vec{AC}$$

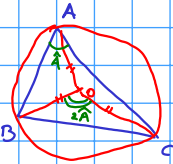
$$\text{de même } \vec{BM} = x \vec{BA} + z \vec{BC} = -(x+z) \vec{AB} + z \vec{AC}$$

$$\text{donc } \det(\vec{MA}, \vec{MB}) = \begin{vmatrix} -y & x+z \\ -z & -z \end{vmatrix} = yz + xz + z^2$$

$$= z(y+x+z) = z^2$$

de même $\beta=y$, $\alpha=x$.

Corollaire



O = centre du cercle circonscrit

$$O = \text{Bar}((A, \sin 2A), (B, \sin 2B), (C, \sin 2C))$$

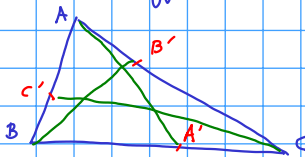
$$\Rightarrow \boxed{G = \text{Bar}((O, 2), (H, 1))} \Rightarrow \boxed{\vec{OH} = 3 \vec{OG}}$$

$$\text{indication: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \tan \hat{B} \tan \hat{C}$$

$$\sin 2\hat{A} = \frac{2 \tan \hat{A}}{1 + \tan^2 \hat{A}}$$

Théorèmes de Ceva et Menelaüs

Soient A, B, C affinement indépendants



$$A' = \text{Bar}((B, 1), (C, \alpha))$$

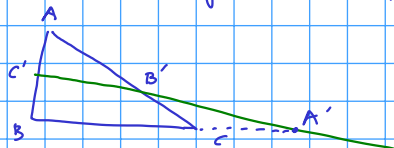
$$B' = \text{Bar}((C, 1), (A, \beta))$$

$$C' = \text{Bar}((A, 1), (B, \gamma))$$

pour certains $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Alors 1) (Ceva) $(AA') \cap (BB') \cap (CC') \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = 1$

2) (Menelaüs) A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = -1$



lemme: $A_i = \text{Bar}(A, \alpha_i)(B, \beta_i)(C, \gamma_i)$ $i=1,2,3$ trois points.

$$A_1, A_2, A_3 \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

démo. (si $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$)

$$\overrightarrow{AA_i} = \beta_i \overrightarrow{AB} + \gamma_i \overrightarrow{AC}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{A_1 A_2} = (\beta_2 - \beta_1) \overrightarrow{AB} + (\gamma_2 - \gamma_1) \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_3} = \overrightarrow{AA_3} - \overrightarrow{AA_1} = (\beta_3 - \beta_1) \overrightarrow{AB} + (\gamma_3 - \gamma_1) \overrightarrow{AC}$$

$$\text{donc } \det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}) = \begin{vmatrix} \beta_2 - \beta_1 & \gamma_2 - \gamma_1 \\ \beta_3 - \beta_1 & \gamma_3 - \gamma_1 \end{vmatrix} =$$

$$\text{or } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}} \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 & \gamma_2 - \gamma_1 \\ 0 & \beta_3 - \beta_1 & \gamma_3 - \gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$(\text{Menelais}) \quad A', B', C' \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha\beta\gamma + 1$

remarque. Si A, B, C affinement indépendants

$$\Delta_1 = \text{Bar}(A, a_1), (B, b_1), (C, c_1)$$

$$\Delta_2 = \text{Bar}(A, a_2), (B, b_2), (C, c_2)$$

$$\text{alors } \Delta_1 = \Delta_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1) \text{ colinéaire à } (a_2, b_2, c_2) \quad \text{exco.}$$

(Pause = 10 min).

Analyse complexe

1) Intégrale le long d'un chemin.

Définition. Soit $f: \underbrace{\Omega \rightarrow \mathbb{C}}_{\text{ouvert de } \mathbb{C}} \text{ continue}$

Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un «chemin» $\mathcal{C}^1$ par morceaux tq $\text{Im } \gamma \subset \Omega$
 continu sur $[a, b]$

on note $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

Ex. $\gamma: \begin{array}{c} \text{⬆} \\ \text{⊙} \end{array} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{laet c-a-d: } \gamma(0) = \gamma(2\pi))$
 $t \mapsto e^{it}$

$$\int_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} n \neq -1 & \text{⊙} \\ ? & \end{cases} \quad \text{car } \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{int}}_{\gamma(t)^n} \underbrace{ie^{it} dt}_{\gamma'(t) dt}$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} (e^{i(n+1)t})' dt = \frac{1}{n+1} [e^{i(n+1)t}]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi \quad = 0$$

Exemple. n°3 feuille 4.

Calculer $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt$

Soit $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$

$$\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

$$= 2i\pi \times \text{coefficient devant } z^{-1} \text{ de } \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z}$$

$$= 2i\pi \binom{2n}{n}$$

or $z + \frac{1}{z} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$ si $z = e^{it}$

donc $\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} 2^{2n} (\cos t)^{2n} dt$

d'où $\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$

de même calculer $\int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \dots$

2) Indice d'un point par rapport à un lacet.

Définition. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux
($\gamma(a) = \gamma(b)$)

Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Im} \gamma$, on pose

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Propriétés. 1) $\text{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$

2) $\text{Ind}_\gamma(z_0)$ est constant si $z_0 \in$ composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Im} \gamma$

3) $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 0$ si $z_0 \in$ composante connexe non bornée

4) Exemples

a) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1 \\ 0 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

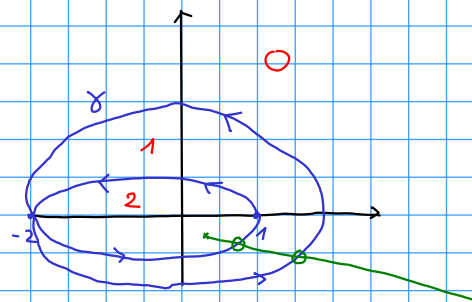


b) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto (2 + \cos t) e^{2it}$

calculer $\text{Ind}_\gamma(0) = 2$

$\text{Ind}_\gamma(2) = 1$

$\text{Ind}_\gamma(m) = 0 \quad |m| > 3$



Interprétation : $\text{Ind}_\gamma(z_0) = \#$ intersections d'une demi-droite issue de z_0
avec γ avec signe comptés



Démo de 1) $\text{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$

On pose $F(z) = \exp\left(\int_a^z \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0} dt\right)$
 F dérivable et $(\gamma(z)-z_0)F(z)' = 0$

Donc $F(b) = F(a) \Rightarrow (\gamma(b)-z_0)F(b) = (\gamma(a)-z_0)F(a)$

$\Rightarrow F(b) = 1 \Rightarrow \exp \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 1$

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \in 2i\pi\mathbb{Z}$

3) Formules de Cauchy

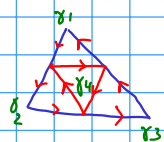
Théorème (Goursat) Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$

Soit $\gamma \triangle \subset \Omega$ (triangle)

On suppose $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe
 où $z_0 \in \Omega$

et f continue sur Ω

alors $\int_\gamma f = 0$ $\square$



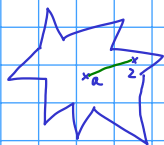
$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f$

...

Application 1) Primitive

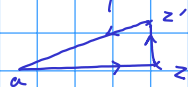
Si f holomorphe sur Ω , si Ω ouvert étoilé

$(\exists a \in \Omega, \forall z \in \Omega, [a, z] \subset \Omega)$
 $= \{ta + (1-t)z \mid 0 \leq t \leq 1\}$



alors $F(z) = \int_{[a, z]} f$ est une primitive de f

Théorème de Goursat pour



$$F(z) - F(z') = \int_{[z', z]} f$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{z' \rightarrow z \\ z' \neq z}} \frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = f(z)$$

$$0 = \underbrace{\int_{[a, z]} f}_{F(z)} + \int_{[z, z']} f + \underbrace{\int_{[z', a]} f}_{-F(z')}$$

...

Théorème.
(formules de Cauchy)

Soit Ω ouvert étoilé de $\mathbb{C}$

Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet

Soit f holomorphe sur Ω

alors a) $\forall z \notin \gamma$, $\text{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z} du$

b) $\forall z \notin \gamma$, $\text{Ind}_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du$ $\square$

Corollaires

(Liouville) Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$ (entière)

bornée. Alors f constante.

démo $\gamma_r(t) = z + re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z)^2} du \quad |f| \leq M$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^2} = \frac{M}{r^2} \quad (\forall r)$$

$$\Rightarrow |f'(z)| \leq 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \dots$$

Conséquence (d'Alémbert) $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

démo. Considérer $\frac{1}{P}$...

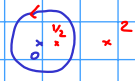
Exemple. Exercice 8 feuille 4

Calculer $\int_C \frac{dz}{z^2 - 5z + 2}$

où $C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$

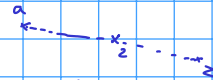
$$\frac{1}{z^2 - 5z + 2} = \frac{1}{2(z-2)(z-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{3}}{z-2} - \frac{\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \int &= \frac{1}{3} \int_C \frac{dz}{z-2} - \frac{1}{3} \int_C \frac{dz}{z-1/2} \\ &= \frac{2i\pi}{3} \underset{0}{\text{Ind}_C(2)} - \frac{2i\pi}{3} \underset{1}{\text{Ind}_C(1/2)} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} \end{aligned}$$



Remarque. $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ n'est pas étoilé

on ne peut pas appliquer la formule de Cauchy à $\frac{1}{z-2}$...



(Pause 5 min)

Calcul différentiel

1) Jacobienne et Hessienne

définition. Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{ouvert}} \mathbb{R}^n$ différentiable en $a \in \Omega$

on note $J_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1(a) & \dots & \partial_{x_m} f^1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f^n(a) & \dots & \partial_{x_m} f^n(a) \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$
 (jacobienne)

où $f = (f^1, \dots, f^n)$ $x_1, \dots, x_m$ variables

Propriétés. Si $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{ouvert}} \mathbb{R}^n$

Si $g: V \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{ouvert}} \mathbb{R}^p$

Si $a \in \Omega, f(a) \in V,$

Si f différentiable en a, g différentiable en $f(a)$

alors $g \circ f$ différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

En termes de matrices: $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$

- Si $n=1$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(a) = (\partial_{x_1} f(a), \dots, \partial_{x_m} f(a)) \quad \text{gradient}$$

- Théorème de Schwarz

Si $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ sur Ω

c-à-d $df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^1$.

$$\text{alors } \forall i, j \forall a \in \Omega. \quad \partial_{x_i}(\partial_{x_j} f)(a) = \partial_{x_j}(\partial_{x_i} f)(a)$$

$$\text{contre-exemple. } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\partial_x \partial_y f(0, 0) \neq \partial_y \partial_x f(0, 0).$$

- Hessienne. Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$
Si $a \in \Omega$
 $H_f(a) = (\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(a))_{1 \leq i, j \leq m} \in M_m(\mathbb{R})$ symétrique

Formule de Taylor

$$h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$$

Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$

si $x \in \Omega$, si $h \in \mathbb{R}^m$ alors

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{\nabla f(x) \cdot h}_{\sum_{i=1}^m \partial_{x_i} f(x) h_i} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq m} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x) h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

Proposition. a) Si f a un minimum local en x_0 , alors

$H_f(x_0)$ est positive ($\forall h \in \mathbb{R}^m, {}^t h H_f h \geq 0$)

b) Si $H_f(x_0)$ est définie positive ($\forall h \in \mathbb{R}^m, {}^t h H_f h > 0$) alors

f a minimum local en x_0 .

Exercice 3 feuille 4

Fin du cours 4.

à jeudi prochain