Cours du jeudi 20 avril 2023

Géométrie

Birapport et théorème de Pascal

Définitions.

— *Birapport de quatre droites.* Soient $\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{d_3}, \overrightarrow{d_4}$ quatre droites vectorielles du plan $\mathbb{R}^2$ †. On pose

$$[\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{d_3}, \overrightarrow{d_4}] = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

où $\forall\, i,\ d_i = \{(tx_i, ty_i)\ :\ t \in \mathbb{R}\}$ pour certains $(0,0) \neq (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$.

— *Birapport de quatre points alignés.* Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points alignés dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ ‡. On pose :

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = \frac{\overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_2A_4}}{\overrightarrow{A_1A_4}\ \overrightarrow{A_2A_3}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\ .$$

— *Birapport de quatre points sur une conique lisse.* Soit $\mathscr{C}$ une conique lisse du plan affine $\mathbb{R}^2$ § Soient $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathscr{C}$, on pose :

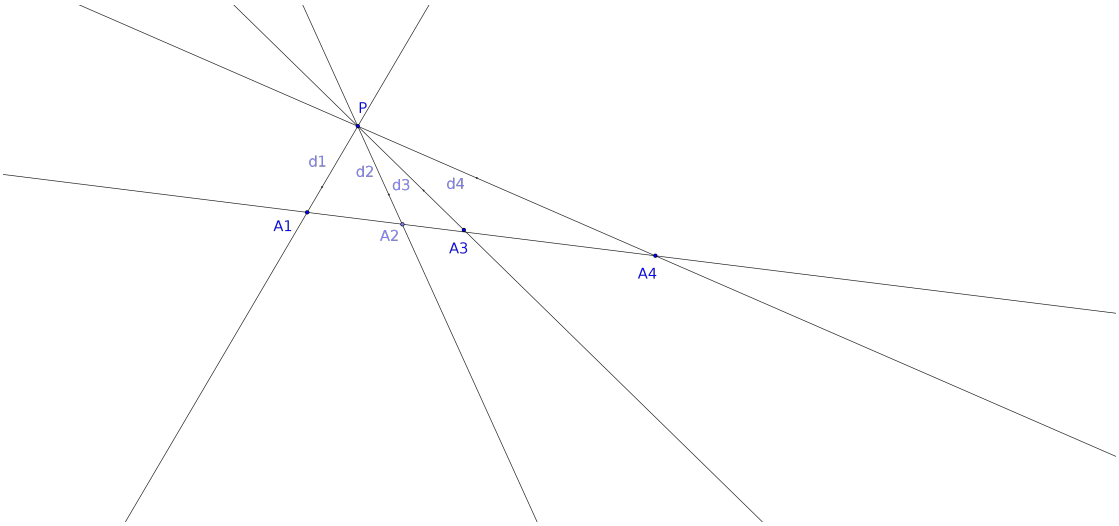
$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = [\overrightarrow{(KA_1)}, \overrightarrow{(KA_2)}, \overrightarrow{(KA_3)}, \overrightarrow{(KA_4)}]$$

pour un point quelconque $K \in \mathscr{C}$.

Propriétés.

1) Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont alignés alors pour tout point P du plan ¶ on a $[A_1, A_2, A_3, A_4] = [\overrightarrow{(PA_1)}, \overrightarrow{(PA_2)}, \overrightarrow{(PA_3)}, \overrightarrow{(PA_4)}]$.

†. on suppose qu'il n'y en a pas trois égales.
‡. On suppose qu'il n'y en a pas trois égaux.
§. *c-à-d* une ellipse, une parabole ou une hyperbole.
¶. qui n'est pas sur la droite (A_1A_i)



2) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection *affine*, alors $[T(A_1), T(A_2), T(A_3), T(A_4)] = [A_1, A_2, A_3, A_4]$.

3) Si A_1, A_2, A_3 sont trois points sur une droite affine d, alignés, alors l'application $A_4 \mapsto [A_1, A_2, A_3, A_4]$ est injective sur la droite d.

4) Le birapport de quatre points sur une conique lisse $\mathscr{C}$ est bien défini et est indépendant du point $K \in \mathscr{C}$ choisi.

Démonstration de 4).

Cas d'une parabole.

D'après 2), on peut supposer que $\mathscr{C} = (y = x^2)$.
Soient $K = (x, x^2), A_i = (x_i, x_i^2)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ sur $\mathscr{C}$. On a :

$$[\overrightarrow{(KA_1)}, \overrightarrow{(KA_2)}, \overrightarrow{(KA_3)}, \overrightarrow{(KA_4)}] = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x & x_3 - x \\ x_1^2 - x^2 & x_3^2 - x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x & x_4 - x \\ x_2^2 - x^2 & x_4^2 - x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x & x_4 - x \\ x_1^2 - x^2 & x_4^2 - x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x & x_3 - x \\ x_2^2 - x^2 & x_3^2 - x^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_2 - x)(x_4 - x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 + x & x_3 + x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x & x_4 + x \end{vmatrix}}{(x_1 - x)(x_4 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 + x & x_4 + x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x & x_3 + x \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

qui est indépendant de $x \in \mathbb{R}$.

Cas d'une hyperbole.

D'après 2), on peut supposer que $\mathscr{C} = (xy = 1)$.
Soient $K = (x, x^{-1})$, $A_i = (x_i, x_i^{-1})$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ sur $\mathscr{C}$. On a :

$$[\overrightarrow{(KA_1)}, \overrightarrow{(KA_2)}, \overrightarrow{(KA_3)}, \overrightarrow{(KA_4)}] = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x & x_3 - x \\ x_1^{-1} - x^{-1} & x_3^{-1} - x^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x & x_4 - x \\ x_2^{-1} - x^{-1} & x_4^{-1} - x^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x & x_4 - x \\ x_1^{-1} - x^{-1} & x_4^{-1} - x^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x & x_3 - x \\ x_2^{-1} - x^{-1} & x_3^{-1} - x^{-1} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_2 - x)(x_4 - x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_1^{-1}x^{-1} & -x_3^{-1}x^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2^{-1}x^{-1} & -x_4^{-1}x^{-1} \end{vmatrix}}{(x_1 - x)(x_4 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_1^{-1}x^{-1} & -x_4^{-1}x^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2^{-1}x^{-1} & -x_3^{-1}x^{-1} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-x^{-1})^2(x_3^{-1} - x_1^{-1})(x_4^{-1} - x_2^{-1})}{(-x^{-1})^2(x_4^{-1} - x_1^{-1})(x_3^{-1} - x_2^{-1})}$$

$$= \frac{(x_3^{-1} - x_1^{-1})(x_4^{-1} - x_2^{-1})}{(x_4^{-1} - x_1^{-1})(x_3^{-1} - x_2^{-1})}$$

qui est indépendant de $x \in \mathbb{R}^*$.

Cas d'un cercle.

D'après 2), on peut supposer que $\mathscr{C} = (x^2 + y^2 = 1)$.
Soient $K = (\cos x, \sin x)$, $A_i = (\cos x_i, \sin x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ sur $\mathscr{C}$. On a :

$$[\overrightarrow{(KA_1)}, \overrightarrow{(KA_2)}, \overrightarrow{(KA_3)}, \overrightarrow{(KA_4)}] = \frac{\begin{vmatrix} \cos x_1 - \cos x & \cos x_3 - \cos x \\ \sin x_1 - \sin x & \sin x_3 - \sin x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x_2 - \cos x & \cos x_4 - \cos x \\ \sin x_2 - \sin x & \sin x_4 - \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x_1 - \cos x & \cos x_4 - \cos x \\ \sin x_1 - \sin x & \sin x_4 - \sin x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x_2 - \cos x & \cos x_3 - \cos x \\ \sin x_2 - \sin x & \sin x_3 - \sin x \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -2\sin\frac{x_1+x}{2}\sin\frac{x_1-x}{2} & -2\sin\frac{x_3+x}{2}\sin\frac{x_3-x}{2} \\ 2\cos\frac{x_1+x}{2}\sin\frac{x_1-x}{2} & 2\cos\frac{x_3+x}{2}\sin\frac{x_3-x}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2\sin\frac{x_2+x}{2}\sin\frac{x_2-x}{2} & -2\sin\frac{x_4+x}{2}\sin\frac{x_4-x}{2} \\ 2\cos\frac{x_2+x}{2}\sin\frac{x_2-x}{2} & 2\cos\frac{x_4+x}{2}\sin\frac{x_4-x}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2\sin\frac{x_1+x}{2}\sin\frac{x_1-x}{2} & -2\sin\frac{x_4+x}{2}\sin\frac{x_4-x}{2} \\ 2\cos\frac{x_1+x}{2}\sin\frac{x_1-x}{2} & 2\cos\frac{x_4+x}{2}\sin\frac{x_4-x}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2\sin\frac{x_2+x}{2}\sin\frac{x_2-x}{2} & -2\sin\frac{x_3+x}{2}\sin\frac{x_3-x}{2} \\ 2\cos\frac{x_2+x}{2}\sin\frac{x_2-x}{2} & 2\cos\frac{x_3+x}{2}\sin\frac{x_3-x}{2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\sin\frac{x_1-x}{2}\sin\frac{x_3-x}{2}}{\sin\frac{x_1-x}{2}\sin\frac{x_4-x}{2}} \frac{\sin\frac{x_2-x}{2}\sin\frac{x_4-x}{2}}{\sin\frac{x_2-x}{2}\sin\frac{x_3-x}{2}} \frac{\begin{vmatrix} \sin\frac{x_1+x}{2} & \sin\frac{x_3+x}{2} \\ \cos\frac{x_1+x}{2} & \cos\frac{x_3+x}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin\frac{x_2+x}{2} & \sin\frac{x_4+x}{2} \\ \cos\frac{x_2+x}{2} & \cos\frac{x_4+x}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin\frac{x_1+x}{2} & \sin\frac{x_4+x}{2} \\ \cos\frac{x_1+x}{2} & \cos\frac{x_4+x}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin\frac{x_2+x}{2} & \sin\frac{x_3+x}{2} \\ \cos\frac{x_2+x}{2} & \cos\frac{x_3+x}{2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(\sin\frac{x_1+x}{2}\cos\frac{x_3+x}{2} - \sin\frac{x_3+x}{2}\cos\frac{x_1+x}{2})}{(\sin\frac{x_1+x}{2}\cos\frac{x_4+x}{2} - \sin\frac{x_4+x}{2}\cos\frac{x_4+x}{2})} \frac{(\sin\frac{x_2+x}{2}\cos\frac{x_4+x}{2} - \sin\frac{x_4+x}{2}\cos\frac{x_2+x}{2})}{(\sin\frac{x_2+x}{2}\cos\frac{x_3+x}{2} - \sin\frac{x_3+x}{2}\cos\frac{x_3+x}{2})}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x_1+x}{2} - \frac{x_3+x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1+x}{2} - \frac{x_4+x}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{x_2+x}{2} - \frac{x_4+x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_2+x}{2} - \frac{x_3+x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{x_1-x_3}{2}\sin\frac{x_2-x_4}{2}}{\sin\frac{x_1-x_4}{2}\sin\frac{x_2-x_3}{2}}$$

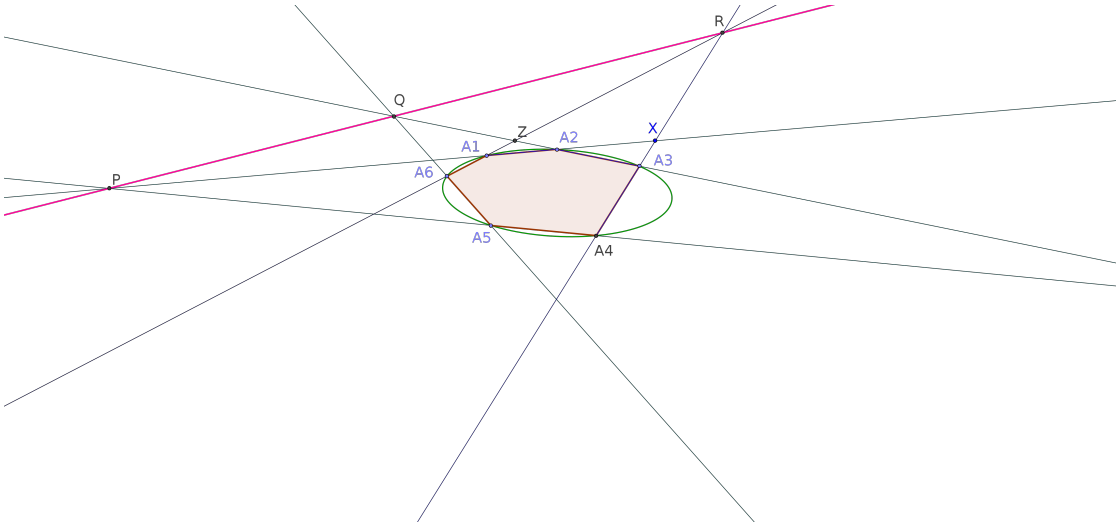
qui est indépendant de $x \in \mathbb{R}$.

Théorème de Pascal.

i) Soient $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone dont les sommets sont sur une conique lisse du plan affine. Alors les intersections des côtés opposés sont alignées.

c-à-d les points $(A_1A_2)\cap(A_4A_5)$, $(A_2A_3)\cap(A_5A_6)$, $(A_3A_4)\cap(A_6A_1)$ sont alignés.

ii) *Réciproque.* Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone du plan affine dont les intersections des côtés opposés sont alignées. Alors il existe une conique (*non forcément lisse*) qui passe par les six sommets.



Démonstration.

Soient $P = (A_1A_2) \cap (A_3A_4)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$.

Introduisons les points $X = (A_1A_2) \cap (A_3A_4)$, $Z = (A_2A_3) \cap (A_6A_1)$.

On a :

$$[A_1, A_2, X, P] = [\overrightarrow{(A_4A_1)}, \overrightarrow{(A_4A_2)}, \overrightarrow{(A_4X)}, \overrightarrow{(A_4P)}]$$

(car les points A_1, A_2, X, P sont alignés)

$$= [\overrightarrow{(A_4A_1)}, \overrightarrow{(A_4A_2)}, \overrightarrow{(A_4A_3)}, \overrightarrow{(A_4A_5)}]$$

$$= [\overrightarrow{(A_6A_1)}, \overrightarrow{(A_6A_2)}, \overrightarrow{(A_6A_3)}, \overrightarrow{(A_6A_5)}]$$

(car les points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sont sur une conique)

$$= [\overrightarrow{(A_6Z)}, \overrightarrow{(A_6A_2)}, \overrightarrow{(A_6A_3)}, \overrightarrow{(A_6Q)}]$$

$$= [Z, A_2, A_3, Q]$$

(car les points Z, A_2, A_3, Q sont alignés)

$$= [\overrightarrow{(RZ)}, \overrightarrow{(RA_2)}, \overrightarrow{(RA_3)}, \overrightarrow{(RQ)}]$$

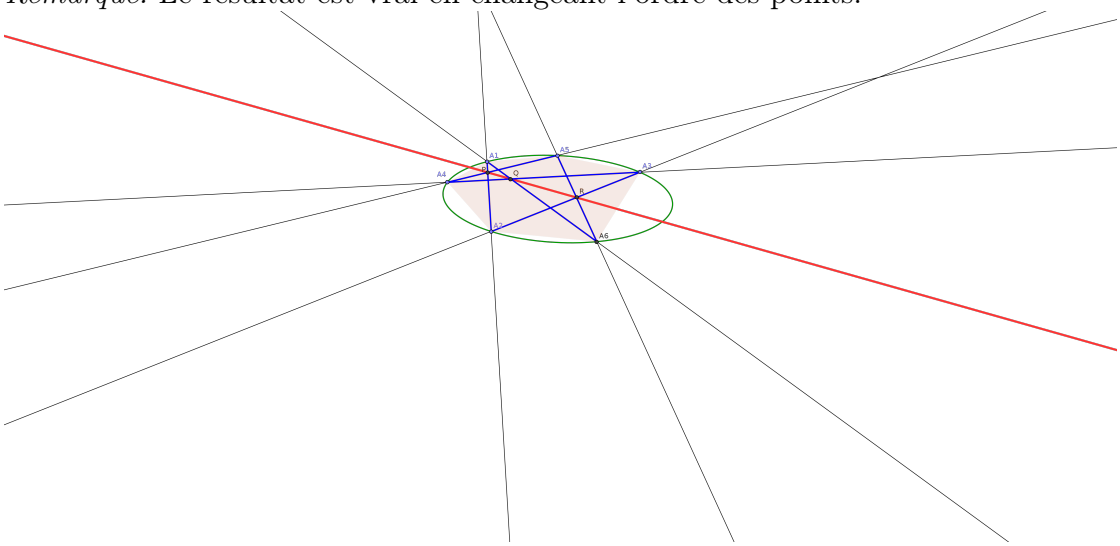
$$= [\overrightarrow{(RA_1)}, \overrightarrow{(RA_2)}, \overrightarrow{(RX)}, \overrightarrow{(RT)}]$$

$$= [A_1, A_2, X, T]$$

si on pose $T = (RQ) \cap (A_1A_2)$.

Donc $[A_1, A_2, X, P] = [A_1, A_2, X, T] \Rightarrow P = T \Rightarrow P \in (RQ) \Rightarrow P, Q, R$ alignés.

Remarque. Le résultat est vrai en changeant l'ordre des points.



Analyse complexe

Singularités isolées et théorème des résidus

Définition. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction. Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f a une *singularité* en z_0 si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Dans ce cas, il existe $R > 0$ tel que $D(z_0, R)$ † $\subseteq \Omega$ et f est holomorphe sur $D'(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < R\}$. En particulier on a un développement en série de Laurent

$$\forall\, 0 < |z - z_0| < R,\ f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

où $\forall\, |z - z_0| < R$, $\sum_{n \geqslant 0} |a_n||z - z_0|^n < \infty$ et $\forall\, 0 < |z - z_0|$, $\sum_{n<0} |a_n||z - z_0|^n < \infty$.

Remarque. Les coefficients de a_n ne dépendent que de f et vérifient :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, 0 < r < R,\ a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

†. $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < R\}$

où $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + rz^{it}$.

Définitions. Avec les notations ci-dessus :

i) si $\inf_{n\in\mathbb{Z}}\{n \in \mathbb{Z} \,:\, a_n \neq 0\} \geqslant 0$, on dit que f a une *singularité artificielle* en z_0 (f est holomorphe en z_0) ;

ii) si $\inf_{n\in\mathbb{Z}}\{n \in \mathbb{Z} \,:\, a_n \neq 0\} = -n_0 \in \mathbb{N}_{<0}$, on dit que f a un pôle d'ordre n_0 en z_0 ;

iii) si $\inf_{n\in\mathbb{Z}}\{n \in \mathbb{Z} \,:\, a_n \neq 0\} = -\infty$, on dit que f a une *singularité essentielle* z_0.

Exemples. La fonction $e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité essentielle en 0, la fonction $\frac{1}{z-\frac{1}{z}}$ a un pôle d'ordre 1 en ± 1 et une singularité artificielle en 0.

Définition. Si f a une singularité en z_0, on note

$$\text{Rés}_{z_0} f = a_{-1}$$

le *résidu de f en z_0*.

Théorème des résidus. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction telle que $\forall\, z \in \Omega$, f est holomorphe en z ou f a une singularité en z. Soit γ un lacet contenu dans $\Omega \setminus \{\text{singularités non artificielles de } f\}$ tel que

$$\forall\, z \notin \Omega,\ \text{Ind}_\gamma(z) = 0^{\dagger}\ .$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_z \text{Rés}_z f \text{Ind}_\gamma(z)$$

où z décrit les singularités de f dans Ω.

Démo. Les singularités non artificielles de f sont isolées. De plus le lacet γ a une image compacte dans $\mathbb{C}$ donc est contenu dans un disque fermé $\overline{D}$ dont le complémentaire est contenu dans la composante connexe non borné de $\mathbb{C}\setminus\gamma$. Donc $\forall\, z \notin \overline{D}, \text{Ind}_\gamma(z) = 0$. Donc l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{Ind}_\gamma(z) \neq 0\}$ est contenu dans un compact donc l'ensemble des singularités non artificielles z_k telles que $\text{Ind}_\gamma(z_i) \neq 0$ est fini. Notons $z_1, ..., z_N$ ces singularités‡. Pour tout k, il existe $R_k > 0$ tel que $D_k = D(z_k, R_k) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_k| < R_k\} \subseteq \Omega$ et f est holomorphe sur $D'_k = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_k| < R_k\}$.

†. si Ω est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, cette condition est vérifiée.

‡. en particulier, si $z \notin \{z_1, ..., z_N\}$, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$.

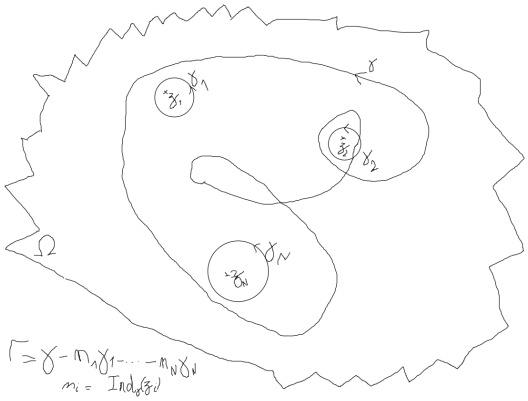
Pour tout k, soit γ_k le lacet $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_k + r_k e^{it}$ où le rayon est choisi tel que $0 < r_k < R_k$.

Alors, pour tout $1 \leqslant k \leqslant N$, on a pour toute singularité non artificielle z de f, $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = z_k \\ 0 & \text{si } z \neq z_k \end{cases}$.

De plus, $\forall\, z \notin \Omega$, $\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N$, $|z - z_k| > R_k$ † $\Rightarrow \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$.

Soit Γ le chemin généralisé

$$\Gamma = \gamma - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ind}_{\gamma}(z_k)\gamma_k \ .$$



Soit $\Omega' = \Omega \setminus \{\text{singularités non artificielles de } f\}$.

Alors

— f est holomorphe sur Ω'.

— $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega'$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

En effet, soit $z \notin \Omega'$.

a) Si $z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z) - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$.

b) Si $z \in \Omega$, alors z est une singularité non artificielle de f et

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z) - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

$$= \mathrm{Ind}_\gamma(z) - \sum_{\substack{k=1 \\ z_k = z}}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

†. car $D(z_k, R_k) \subseteq \Omega$

$$= 0$$

car $\mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z_k) = 1$ et $z \notin \{z_1, ..., z_N\} \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Donc d'après la version généralisée du théorème de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_k} f = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\mathrm{Rés}_{z_k} f = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\mathrm{Rés}_{z_k} f$$

$$= \sum_z \mathrm{Ind}_\gamma(z)\mathrm{Rés}_z f$$

Q.e.d.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

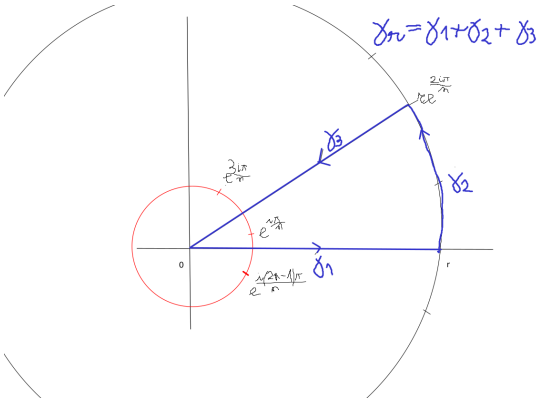
Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$. Les singularités de $f$sont les $e^{i\pi\frac{1+2k}{n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Soit $r > 1$. Soit $\gamma_r = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ où :

$$\gamma_1 : [0, r] \to \mathbb{C},\ x \mapsto x$$

$$\gamma_2 : [0, \frac{2\pi}{n}] \to \mathbb{C},\ x \mapsto re^{ix}$$

$$\gamma_3 : [0, r] \to \mathbb{C},\ x \mapsto (r-x)e^{\frac{2i\pi}{n}}\ .$$



C'est un lacet. D'après le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} f = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z_k)\mathrm{Rés}_{z_k} f$$

$$= \mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z_0)\mathrm{Rés}_{z_0} f = \mathrm{Rés}_{z_0} f$$

or, comme f a un pôle simple en z_0, $\mathrm{Rés}_{z_0} f = \lim_{\substack{z\to \mathbf{Z}_0 \\ z\neq z_0}} \frac{(z-z_0)}{1+z^n} = \frac{1}{(1+z^n)'(z_0)} = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = \frac{-e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$.

D'un autre côté,

$$\int_{\gamma_r} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_2} f$$

or, $\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = (1-e^{\frac{2i\pi}{n}})\int_0^r f(x)dx \overset{r\to\infty}{\to} (1-e^{\frac{2i\pi}{n}})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

On a aussi

$$|\int_{\gamma_3} f| \leqslant \sup_{|z|=r} \frac{1}{|1+z^n|} l(\gamma_3)$$

$$\leqslant \frac{1}{r^n-1}\frac{2\pi r}{n} \overset{r\to\infty}{\to} 0 \ .$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi}(1-e^{\frac{2i\pi}{n}})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}}}{n(1-e^{\frac{2i\pi}{n}})}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \ .$$

Calcul différentiel

1ère et 2ème forme fondamentales, courbure de Gauss

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Définition. Si X est $\mathcal{C}^1$ sur Ω, la *1ère forme fondamentale* de la surface paramétrée X en le point $(u, v) \in \Omega$ est la matrice :

$$I_X(u,v) = \begin{pmatrix} ||\partial_u X||^2 & \partial_u X \cdot .\partial_v X \\ \partial_u X \cdot \partial_v X & ||\partial_v X||^2 \end{pmatrix}$$

où $\cdot$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ et $||\ ||$ la norme associée.

Exemple. Soit $X : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$ une paramétrisation d'un morceau de la sphère centrée en 0 de rayon $R > 0$.

Dans ce cas,

$$\partial_u X = (1, 0, \frac{-u}{R^2 - u^2 v^2}),\ \partial_v X = (0, 1, \frac{-v}{R^2 - u^2 v^2}),$$

$$I_X(u,v) = \frac{1}{R^2 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} R^2 - v^2 & uv \\ uv & R^2 - u^2 \end{pmatrix} .$$

Définition. Le *vecteur normal* de la surface paramétrée X en le point $(u, v) \in \Omega$ est le vecteur

$$\overrightarrow{n} = \frac{\partial_u X \wedge \partial_v X}{||\partial_u X \wedge \partial_v X||} .$$

Le *plan tangent* de la surface paramétrée X en le point $(u, v) \in \Omega$ est le sous-espace engendré par les vecteurs $\partial_u X, \partial_v X$ (si cesvecteurs sont linéairement indépendants). *Exemple.* Soit $X : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$. Dans ce cas,

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) .$$

Définition. Si X est $\mathcal{C}^2$ sur Ω, la *2ème forme fondamentale* de la surface paramétrée X en le point $(u, v) \in \Omega$ est la matrice :

$$II_X(u,v) = \begin{pmatrix} \partial^2_{uu} X \cdot \overrightarrow{n} & \partial^2_{uv} X \cdot \overrightarrow{n} \\ \partial^2_{uv} X \cdot \overrightarrow{n} & \partial^2_{vv} X \cdot \overrightarrow{n} \end{pmatrix} .$$

Exemple. Soit $X : (u,v) \mapsto (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$. Dans ce cas,

$$II_X(u,v) = -\frac{1}{R(R^2 - u^2 - v^2)} \begin{pmatrix} R^2 - v^2 & uv \\ uv & R^2 - u^2 \end{pmatrix} .$$

Définition. Si X est $\mathcal{C}^2$ sur Ω, la *courbure de Gauss* de la surface paramétrée X en le point $(u,v) \in \Omega$ est le nombre

$$\frac{\det II_X(u,v)}{\det I_X(u,v)} .$$

Exemple. Soit $X : (u,v) \mapsto (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$. Dans ce cas, la courbure de Gauss est constante et vaut $\frac{1}{R^2}$.