Cours du jeudi 4 mai

Dates des examens

Analyse complexe	lundi 22 mai à 10H	amphi Grignard ou astrée 13
Calcul différentiel, courbes et surfaces	lundi 22 mai à 14H	amphi thémis 10 ou 11
Anneaux et corps	mardi 23 mai à 10h	amphi Caullery ou Jussieu
Probabilités	mercredi 24 mai à 10H	amphi thémis 7, 8 ou 9
Géométrie	jeudi 25 mai à 11H	amphi astrée 13
Analyse fonctionnelle	vendredi 26 mai à 14H	amphi Ampère ou Gouy

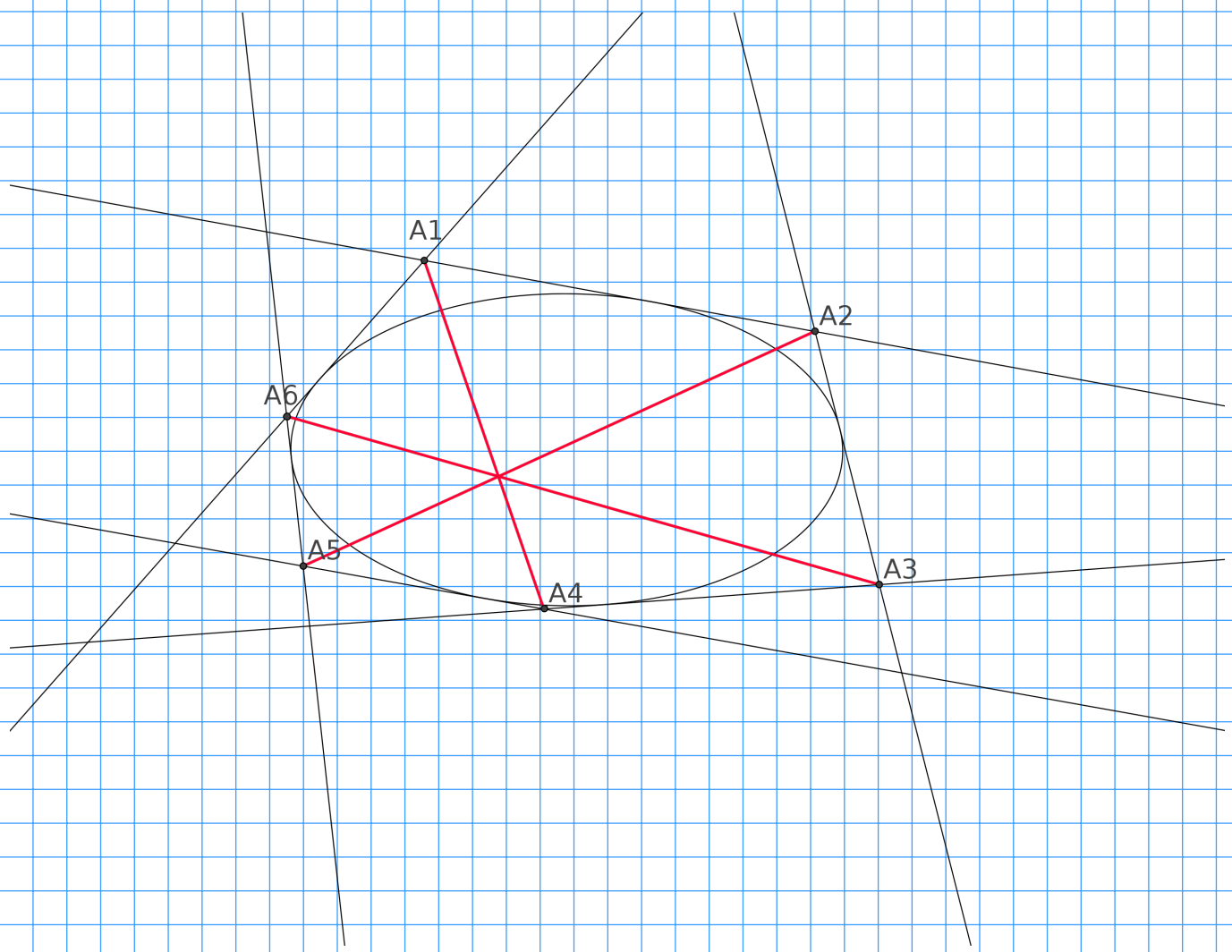
Géométrie

Théorème de Brianchon

Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hexagone dont les côtés (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_5), (A_5A_6), (A_6A_1) sont tangents à une conique lisse $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$.
(c-à-d $\mathcal{C}$ = ellipse, hyperbole ou parabole).
Alors les droites joignant les sommets opposés

$$(A_1A_4),\ (A_2A_5),\ (A_3A_6)$$

sont concourantes.



démo.

DUALITÉ. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{D} = \{$droites affines de $\mathbb{R}^2$ de la forme $y = ax + b\}$

$$P=(a,b) \longmapsto P^* = (y = ax+b)$$

$$d^* = (a,b) \longleftarrow\!\shortmid\; d = (y=ax+b)$$

propriétés : 1) $\forall P \in \mathbb{R}^2$, $(P^*)^* = P$

$\forall d \in \mathcal{D}$, $(d^*)^* = d$

2) si $d_1 \cap d_2 = \{P\}$ $\quad d_1, d_2$ droites, P point

alors $d_1^* d_2^* = P^*$

3) si $P \neq Q \in \mathbb{R}^2$ si $(PQ) \in \mathcal{D}$ alors $(PQ)^* = P^* \cap Q^*$

(si (PQ) verticale alors $P^* // Q^*$)

Exo. Démontrer 2)

$d_1 : y = a_1 x + b_1$, $d_2 = a_2 x + b_2$

$$d_1 \cap d_2 = P = (x_0, y_0) \iff \begin{cases} x_0 = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \\ y_0 = \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2} \end{cases}$$

$d_1^* = (a_1, b_1)$, $d_2^* = (a_2, b_2)$

$$d_1^* d_2^* : \quad y = \underbrace{\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}}_{x_0} x + \underbrace{\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}}_{y_0} \qquad \square$$

Lemme. Soit $\mathcal{C}$ conique lisse

alors il existe une conique lisse $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{R}^2$ telle que d droite tangente à $\mathcal{C} \iff d^* \in \mathcal{C}^*$

Démo.

Pour $\mathcal{C} : \quad x^2+y^2 = 1$ $\qquad \mathcal{C}^* = \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a^2-b^2=-1\}$

$d = (y=ax+b)$ tangente à $\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow \quad x^2+(ax+b)^2 = 1$ a une racine double

$\Leftrightarrow \quad (1+a^2)x^2 + 2ab\,x + b^2-1 = 0$ a une racine double

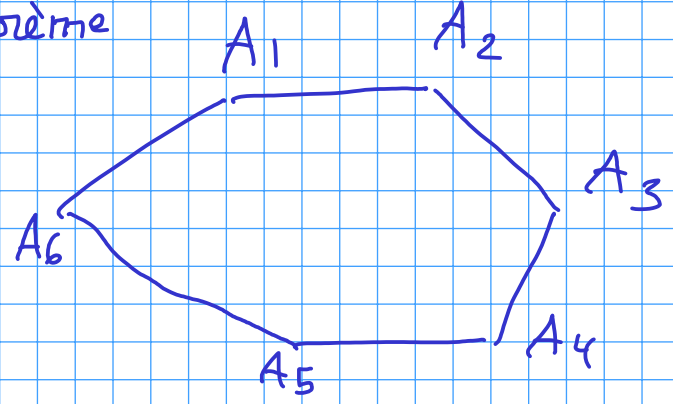
$\Leftrightarrow \quad \Delta = (2ab)^2 - 4(1+a^2)(b^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad +a^2-b^2+1 = 0$

équation d'une hyperbole en (a,b)...

de même pour $\mathcal{C} : xy = 1$ ou $y = x^2$.

démo du théorème



$A'_1 = (A_1A_2)^*$, $A'_2 = (A_2A_3)^*$, $A'_3 = (A_3A_4)^*$, $A'_4 = (A_4A_5)^*$, $A'_5 = (A_5A_6)^*$,

$A'_6 = (A_6A_1)^* \in \mathcal{C}^*$

D'après le théorème de Pascal

$$\left.\begin{array}{l} A'_1A'_2 \cap A'_4A'_5 = P' \\ A'_2A'_3 \cap A'_5A'_6 = Q' \\ A'_3A'_4 \cap A'_6A'_1 = R' \end{array}\right\} \text{sont alignés}$$

Or $P' = A'_1A'_2 \cap A'_4A'_5 = A_2^* \cap A_5^* = (A_2A_5)^*$

$A'_1A'_2 = (A_1A_2 \cap A_2A_3)^* = A_2^*$

de même $A'_4A'_5 = A_5^*$

De même $Q' = A_3^* \cap A_6^* = (A_3A_6)^*$

$R' = A_4^* \cap A_1^* = (A_1A_4)^*$

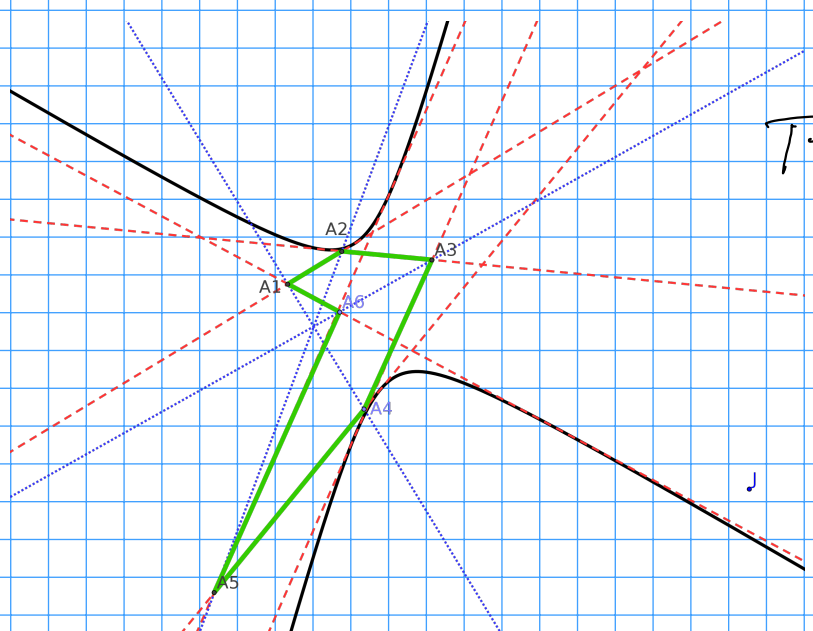
Donc P', Q', R' alignés

$\Leftrightarrow (P'Q') = (Q'R')$

$\Leftrightarrow (A_2A_5 \cap A_3A_6)^* = (A_3A_6 \cap A_1A_4)^*$

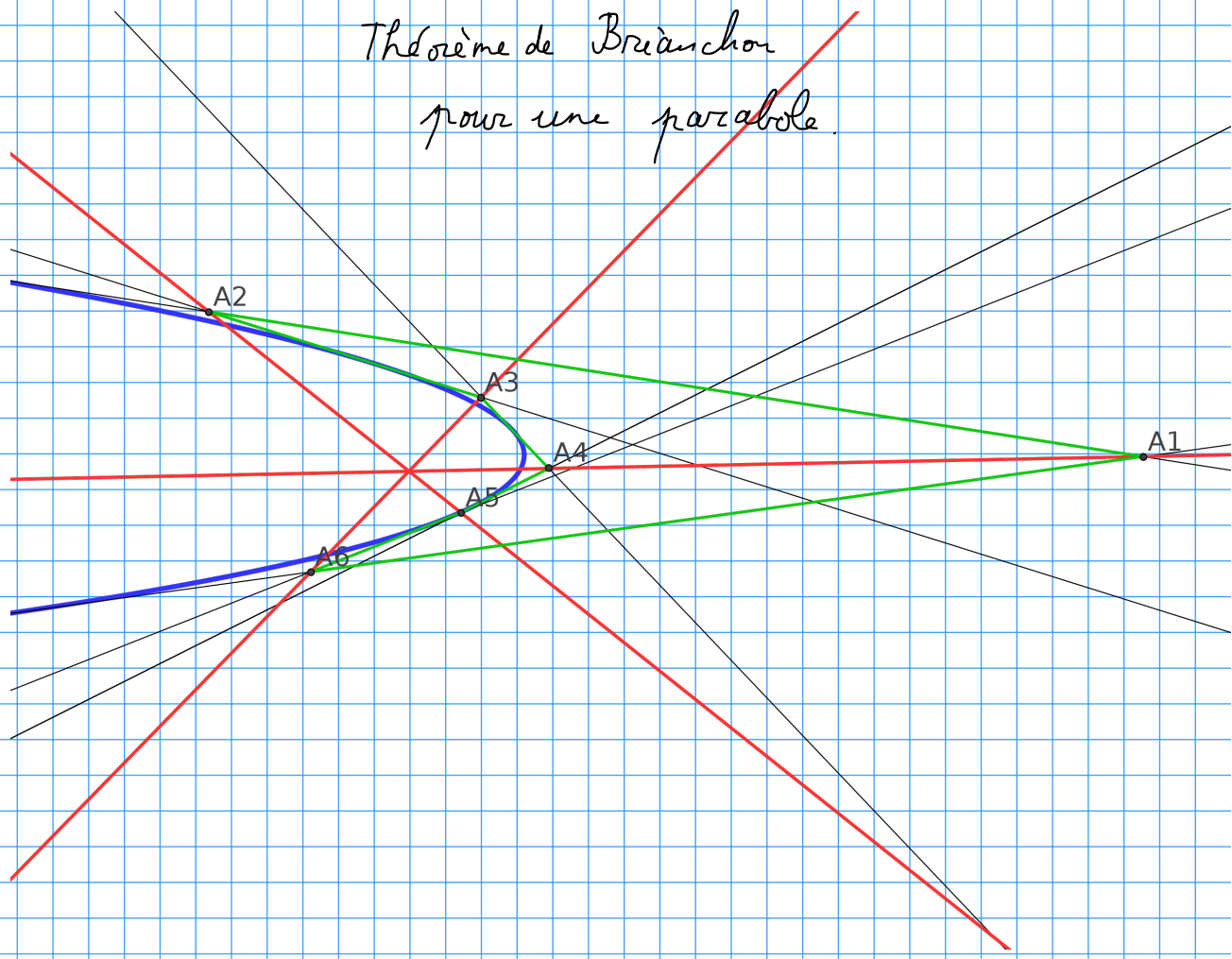
$\Leftrightarrow (A_2A_5) \cap (A_3A_6) = (A_3A_6) \cap (A_1A_4)$

$\Leftrightarrow$ les droites sont concourantes.



Théorème de Brianchon pour une hyperbole

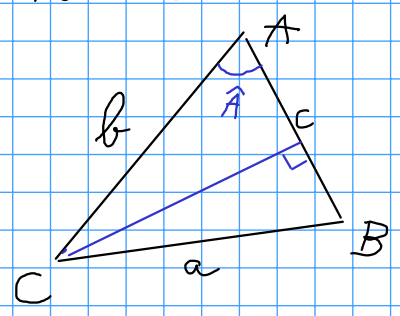
Théorème de Brianchon pour une parabole.



Exercice

Formule de Héron

Soit ABC triangle de $\mathbb{R}^2$ de côtés de longueurs a, b, c.



Soit $p = \frac{a+b+c}{2}$ $(2p = \text{périmètre})$

Alors l'aire du triangle est $\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

remarque. Inégalité triangulaire $p-a, p-b, p-c \geq 0$

démo. $A = \frac{bc\sin\hat{A}}{2}$ $\left(\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}\right)$

$$a^2 = BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\hat{A} = \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

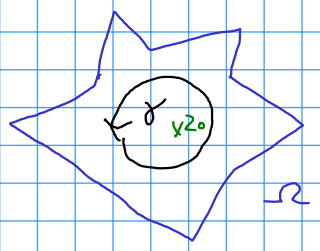
$$= \sqrt{(p-c)(p-b)(p-a)\,p}.$$

(Pause 5')

Analyse complexe

Théorème de Rouché

Soit Ω ouvert étoilé de $\mathbb{C}$



Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (holomorphe)

Soit γ lacet simple dans Ω (c-à-d $\forall x \in \Omega \setminus \gamma$, $\mathrm{Ind}_\gamma(x) = 0$ ou 1)

tel que γ ne passe pas par les zéros de f.

Alors 1) $Z_\gamma(f) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}$ = nombre de zéros de f « à l'intérieur de γ » comptés avec multiplicité.

(x à l'intérieur de γ si $\mathrm{Ind}_\gamma(x) = 1$)

2) Si $\forall z \in \gamma$, $|(f-g)(z)| < |f(z)|$

alors $Z_\gamma(f) = Z_\gamma(g)$

Corollaire (théorème de d'Alembert-Gauss)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Alors P a n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité)

démo. On suppose P unitaire

$$P(z) = z^n + \text{termes de degré} < n$$

donc $\exists R > 0$, $\forall |z| \geq R$ $\left| \dfrac{P(z) - z^n}{z^n} \right| < 1$

D'après le théorème de Rouché (2)

$\Omega = \mathbb{C}$, $f = z^n$, $g = P(z)$, $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto Re^{it}$

$|f - g| < |f|$ sur γ

donc $Z_\gamma f = Z_\gamma g =$ nombre de zéros de P.

$$\| \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{n}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = n$$

Démo du théorème.

1) Les zéros de f sont isolés

et $B = \{x \in \Omega : \mathrm{Ind}_\gamma(x) = 1\}$ est borné

donc f a un nombre fini de zéro dans B.

Notons les $z_1, \dots, z_N$.

$\forall i$, $\exists m_i \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f(z)}{(z - z_i)^{m_i}}$ holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de z_i

Posons $g = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_N)^{m_N}$

$h = \dfrac{f}{g}$

Alors $f = gh$ et $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{g'}{g} + \dfrac{h'}{h} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{z - z_i} + \frac{h'}{h}$

de plus Les zéros éventuels de h dans Ω sont dans $\{x \in \Omega : \mathrm{Ind}_\gamma(x) = 0\}$

D'après le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_x \mathrm{Rés}_x \frac{f'}{f} \cdot \underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(x)}_{= 0 \text{ ou } 1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i$$

(nombre de zéros (avec multiplicité))

2) On pose

$$L(z) = \operatorname{Log}(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \quad \text{holomorphe sur } D(0,1)$$

On a $\left|\frac{f-g}{f}\right| = \left|1-\frac{g}{f}\right| < 1$ sur γ

$h := L\left(\frac{f-g}{f}\right)$ holomorphe $\qquad \gamma : [a,b] \to \Omega$

et $e^{L\left(\frac{f-g}{f}\right)} = 1 - \frac{f-g}{f} = g/f$

$$g = f e^{h} \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{e^{h}(f' + h' f)}{f e^{h}} = \frac{f'}{f} + h'$$

$$Z_\gamma(g) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g'}{g} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f} + \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma h'}_{\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_a^b h'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}_{= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)) = 0}}$$

$\square$

Applications

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
UE d'analyse complexe

Feuille d'exercices n° 7: Dénombrement des zéros, fonctions biholomorphes

---

Autour du théorème de Rouché

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq 1$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que l'équation $1 + z + az^n = 0$ a toutes ses racines dans le disque ouvert $D(0,2)$.

Exercice 2. On note P le polynôme $3X^{15}+4X^8+6X^5+19X^4+3X+1$. Une vérification fastidieuse mais facile à demander à une machine (algorithme d'Euclide) montre que $\mathrm{PGCD}(P,P') = 1$, on l'admettra. Montrer que P possède 15 zéros dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$.
Comment se répartissent ces zéros entre le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?

Exercice 3. Dans cet exercice, on note C_n le carré $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathcal{R}\mathrm{e}(z)| \leq n\pi \text{ et } |\mathcal{I}\mathrm{m}(z)| \leq n\pi\}$ et ∂C_n sa frontière.

1. (a) Vérifier que pour tout y réel :
$$|\tan(iy)| = |\tanh(y)|\,.$$
   (b) Montrer que pour tout x réel et tout y réel strictement positif, $|\tan(x+iy)| \leq \mathrm{cotanh}(y)$. En déduire que pour tout x réel et tout y réel non nul :
$$|\tan(x+iy)| \leq |\mathrm{cotanh}(y)|.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $z \in \partial C_n$,
$$|\tan z| \leq \mathrm{cotanh}(\pi).$$
2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit $b \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, l'équation $\tan z = az + b$ possède exactement $2n+1$ solutions (comptées avec multiplicité) dans le carré C_n.

Solution de l'exercice 2

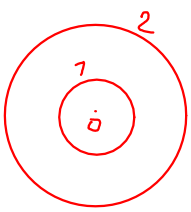
$P = 3X^{15} + 4X^8 + 6X^5 + 19X^4 + 3X + 1$

$\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$.

Si z_0 racine de P, $X - z_0 \mid P \Rightarrow X - z_0 \nmid P'$

$\Rightarrow P'(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ racine simple

Donc P a 15 racines simples dans $\mathbb{C}$



Bijections biholomorphes
Ci-dessous, D désigne le disque-unité ouvert.

Exercice 4.

1. Montrer qu'il n'y a pas de bijection biholomorphe de $\mathbb{C}$ sur D. [*Indication : utiliser le théorème de Liouville.*]
2. Montrer que $\mathbb{C}$ est néanmoins homéomorphe à D.

Exercice 5.

1. Expliciter une bijection biholomorphe de D sur le demi-plan $H = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z)\}$.
2. On note Q le quart de plan $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$. Montrer que $z \mapsto z^2$ est une bijection biholomorphe de Q sur H. En déduire une bijection biholomorphe de Q sur D.
3. Soit α un nombre réel avec $0 < \alpha < \pi$. On note S_α le secteur angulaire $0 < \arg(z) < \alpha$. Expliciter une bijection biholomorphe de S_α sur H.
4. On note B la bande $0 < \mathcal{R}\mathrm{e}(z) < \pi$. Expliciter une bijection biholomorphe de B sur H.
5. On note $B^+ = B \cap H$. On se propose de montrer que $z \mapsto -\cos z$ est une bijection biholomorphe de la demi-bande B^+ sur H.
   (a) Vérifier que pour tous x, y réels,
   $$-\cos(x+iy) = -\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y.$$
   (b) En déduire que pour tout $z \in B^+$, $-\cos z \in H$ et que pour $z \in B^+$, $|\cos z| \to +\infty$ quand $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) \to +\infty$.
   (c) Soit w_0 un complexe, Ω un ouvert étoilé, γ un lacet simple tracé dans Ω et orienté dans le sens direct, f une fonction holomorphe définie sur Ω qui ne prend pas la valeur w_0 sur l'image de γ. En utilisant le théorème de Rouché, justifier que le nombre de solutions (comptées avec multiplicité) de l'équation $f(z) = w_0$ à l'intérieur de γ est égale à l'indice de w_0 par rapport au lacet $f \circ \gamma$.
   (d) Conclure, en appliquant le c) à un w_0 arbitraire de H, à $\Omega = \mathbb{C}$, au rectangle γ de sommets 0, π, $\pi + iA$, iA (A désignant un réel strictement positif choisi assez grand) et à la fonction $f : z \mapsto -\cos z$.
6. En réunissant diverses idées introduites aux questions précédentes, expliciter une bijection biholomorphe du demi-disque $D \cap H$ sur le disque D.

$\forall\ |z| = 2$

$$|P(z) - 3z^{15}| = |3z^8 + 6z^5 + 19z^4 + 3z + 1|$$
$$\leq 3.2^8 + 6.2^5 + 19.2^4 + 3.2 + 1$$
$$\leq 3\left[2^8 + 2^6 + \frac{19}{3}.2^4 + 2 + \frac{1}{3}\right]$$
$$< 3\left[2^8 + 2^6 + 2^7 + 2 + 1\right]$$
$$< 3.2^9$$
$$< |3z^{15}|$$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto 2e^{it}$

Donc d'après le théorème de Rouché

$$Z_\gamma(P) = Z_\gamma(3.z^{15}) = 15$$

Donc les racines de P sont dans $D(0,2)$.

Si $|z| = 1$, $|P(z) - 19z^4| = |3z^{15} + 4z^8 + 6z^5 + 3z + 1|$
$$\leq 3 + 4 + 6 + 3 + 1 = 17$$
$$< |19z^4| = 19$$

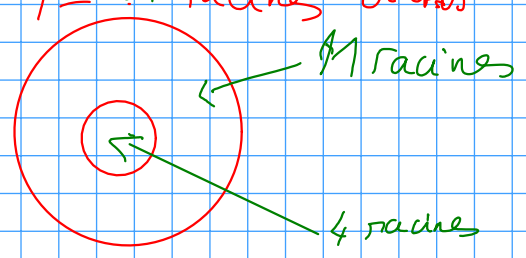
donc d'après le théorème de Rouché pour $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto e^{it}$

$$Z_{\gamma_1}(P) = Z_{\gamma_1}(19z^4) = 4$$

Donc P a 4 racines dans $D(0,1)$

Pas de racines sur $\{z \mid |z| = 1\}$

Donc P a $15 - 4 = 11$ racines dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$



Exercice 4

1) Il n'existe pas de biholomorphisme $\varphi : \mathbb{C} \to D = D(0,1)$
$= \{z : |z| < 1\}$

En effet d'après Liouville un tel φ est constant.

2) $\mathbb{C} \longrightarrow D$ homéomorphisme
(bijectif et bicontinu)

$re^{i\theta} \longmapsto \frac{r}{r+1} e^{i\theta}$

$x+iy \longmapsto \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\rho}{1-\rho} e^{i\theta} \longleftarrow \rho e^{i\theta}$

(pause 5')

Théorème des extremas liés (ou des multiplicateurs de Lagrange).

Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ où Ω est un ouvert.

Soit $g: \Omega \to \mathbb{R}^k, z \mapsto (g_1(z), \ldots, g_k(z))$ une application $\mathcal{C}^1$ où $1 \leqslant k < d$.

On suppose que 1) f a un minimum (ou un maximum) local sur $\{z \epsilon \Omega : g(z) = 0\}$ en z_0.

2) $D_{z_0} g$ est de rang k.

Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \epsilon \mathbb{R}$ tels que $\nabla_{z_0} f = \lambda_1 \nabla_{z_0} g_1 + \cdots + \lambda_k \nabla_{z_0} g_k$.

où $\nabla_z F = (\partial_{z_1} F, \ldots, \partial_{z_d} F) \epsilon \mathbb{R}^d$.

Démo. : La matrice $\mathrm{Jac}(g)_{z_0} = \begin{pmatrix} \partial_{z_1} g_1 \ldots \partial_{z_d} g_1 \\ \ldots \\ \partial_{z_1} g_k \ldots \partial_{z_d} g_k \end{pmatrix}$ est de rang k. Quitte à renuméroter les variables,

on peut supposer que les k dernières colonnes sont indépendantes.

Alors si on pose $z = (x, y)$ où $x \epsilon \mathbb{R}^{d-k}, y \epsilon \mathbb{R}^k$, on a : $\mathrm{Jac}(g)_{z_0} = (D_{x_0} g | D_{y_0} g)$ et $D_{y_0} g \epsilon \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$.

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe des ouverts $x_0 \epsilon U \subset \mathbb{R}^{d-k}, y_0 \epsilon V \subset \mathbb{R}^k$ et une fonction $\mathcal{C}^1$ $\varphi: U \to V$ tels que :

i. $U \times V \subset \Omega$

ii. $\forall x \epsilon U, \forall y \epsilon V, g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

Posons $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$.

Mais alors la fonction $f(x, \varphi(x))$ a un extremume local en $x_0 \epsilon U$.

En dérivant, on obtient :

(1) $\forall 1 \leqslant i \leqslant d-k, \partial_{x_i} f(x_0, y_0) + \Sigma_{j=1}^k \partial_{y_j} f(x_0, y_0) \partial_{x_i} \varphi_j(x_0) = 0$.

Comme $\forall x \epsilon U, g(x, \varphi(x)) = 0$, on a aussi en dérivant :

(2) $\forall 1 \leqslant l \leqslant k, \partial_{x_i} g_l(x_0, y_0) + \Sigma_{j=1}^k \partial_{y_j} g_l(x_0, y_0) \partial_{x_i} \varphi_j(x_0) = 0$.

Notons $L_1, \ldots, L_{d-k} \epsilon (\mathbb{R}^d)^*$ les formes linéaires :

$L_i(x, y) = x_i + \Sigma_{j=1}^k \partial_{x_i} \varphi(x_0) y_j$.

D'après (1) et (2), on a :

$\nabla_{z_0} f$ et $\nabla_{z_0} g_1, \ldots, \nabla_{z_0} g_k \ \epsilon \mathrm{Ker}(L_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(L_{d-k})$.

Or, les forme linéaires $L_1, \ldots, L_{d-k}$ sont indépendantes *(car pour chaque i la variable x_i n'apparaît que dans L_i)*. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(L_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(L_{d-k})) = k$.

Or, puisque $D_{z_0} g$ est de rang k, $(\nabla_{z_0} g_1, \ldots, \nabla_{z_0} g_k)$ est une famille libre donc une base de

$\mathrm{Ker}(L_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(L_{d-k})$. Donc $\nabla_{z_0} f \epsilon \mathrm{Vect}\{\nabla_{z_0} g_1, \ldots, \nabla_{z_0} g_k\}$.

Qed

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 11: Multiplicateurs de Lagrange

Exercice 1. Trouver le point de la courbe $y^2 = 4x$ dont la distance vers $(1, 0)$ est minimale.

a) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;

b) en réduisant le problème à l'étude d'une fonction d'une variable.

Exercice 2. Calculer le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sur l'ellipsoïde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1\}.$$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = 2x^3 + y^4$. Calculer le maximum et le minimum de f sur l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercice 4. (Triangle d'aire maximale) Soit $p > 0$. Rappelons la formule de Héron, qui donne l'aire d'un triangle de cotés x, y, z et de périmètre $2p$:

$$A = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}.$$

Justifier que parmi les triangles de périmètre $2p$, il y en a un d'aire maximale et le déterminer.

Exercice 5. Maximiser la fonction

$$f : (x, y, z) \mapsto yz$$

sous les contraintes $y^2 + z^2 = 1$ et $xz = 3$.

Exercice 6. (Contre-exemple aux extrema liés) On définit pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $g_1(x, y, z) = z$ et $g_2(x, y, z) = z - x^2$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une droite que l'on déterminera.

b) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, les contraintes ne sont pas qualifiées en (x, y, z).

c) Montrer que l'unique point de minimum global de la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe

$$f(x, y, z) := (x + 1)^2 + y^2$$

sur $\mathcal{C}$ n'est pas solution du système donné par le théorème des extrema liés.

Exercice 7. (Inégalité de Hadamard) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et on définit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$, $f(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée des vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n$.

a) Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par $\|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1$ est atteint et qu'il est strictement positif.

b) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange montrer que si le maximum de f sur X est atteint en $(v_1, \ldots, v_n)$ alors les v_i forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

c) En déduire l'inégalité de Hadamard

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \|v_1\| \ldots \|v_n\|$$

pour toute famille d'éléments $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$. Quand a-t-on égalité ?

n°4 fiche 11

$A(x,y,z)$ = aire d'un triangle de côtés de longueur x, y, z

$$\sup_{x+y+z=2p} A$$

$p > 0$ $\quad x+y+z = 2p \Rightarrow 0 \leq x, y, z \leq 2p$

donc $\sup_{x+y+z=2p} A = \max_{x+y+z=2p} A$ car $\{(x,y,z) \in [0,2p]^3\}$ compact

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

max atteint en (x_0, y_0, z_0)

c'est un maximum global donc local.

D'après le théorème des extrémas liés pour A^2

$$\nabla_{x_0,y_0,z_0} A^2 = \left(-p(p-y_0)(p-z_0), -p(p-x_0)(p-z_0), -p(p-x_0)(p-y_0)\right)$$

$$\in \mathbb{R}\, \nabla g \qquad \text{où } g(x,y,z) = x+y+z-2p$$

$$= \mathbb{R}\,(1,1,1)$$

$$\Rightarrow p(p-y_0)(p-z_0) = p(p-x_0)(p-z_0) = p(p-x_0)(p-y_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 = p \text{ et } x_0 = p \Rightarrow z_0 = 0 \\ \text{ou } y_0 = p \text{ et } z_0 = p \Rightarrow x_0 = 0 \\ \text{ou } y_0 \neq p \text{ et } x_0 = z_0 = p \\ \text{ou } x_0, y_0, z_0 \neq p \quad x_0 = z_0 = y_0 \end{cases}$$

maximum atteint en : $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{2p}{3}$

ou en $(p,p,0)$ ou $(p,0,p)$ ou $(0,p,p)$

x_0, y_0, z_0	$(p, p, 0)$	$(p, 0, p)$	$(0, p, p)$	$(2p/3, 2p/3, 2p/3)$
A	0	0	0	$\underbrace{\sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3}}_{\frac{p^2}{3\sqrt{3}}}$

donc $\max\limits_{x+y+z=2p} A = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$

$(\min A = 0)$

<u>n°2</u> Déterminer $\sup\limits_{x^2+y^2 \leq 1} 2x^3 + y^4$

max $\Rightarrow$ sup atteint car $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ = compact de $\mathbb{R}^2$.

en (x_0, y_0)

1er cas $x_0^2 + y_0^2 < 1$

$\Rightarrow$ max local

$\Rightarrow$ $d f_{x_0, y_0} = 0$ où $f = 2x^3 + y^4$

Or $d f_{x_0, y_0} = 0 \iff \begin{cases} 6x_0^2 = 0 \\ 4y_0^3 = 0 \end{cases} \iff x_0 = y_0 = 0$

Ce n'est pas un max local. $f(0,0) = 0 < f(0,y)$

ni un minimum local car $f(x,0) = 2x^3 < 0$ $\forall y$

$\forall -1 \leq x < 0$

2e cas $x_0^2 + y_0^2 = 1$ $\Rightarrow \sup\limits_{x^2+y^2 \leq 1} f = \sup\limits_{x^2+y^2=1} f$

Posons $g = x^2+y^2-1$

D'après le théorème des extremas liés :

$$\underset{(6x^2,\,4y^3)}{\nabla f} \in \mathbb{R}\,\nabla g = \mathbb{R}\,(2x, 2y)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6x^2 & 2x \\ 4y^3 & 2y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12x^2y - 8xy^3 = 0$$

$$\Rightarrow xy\,(12x - 8y^2) = 0$$

$$\Rightarrow xy = 0 \quad \text{ou } xy \neq 0 \text{ et } 12x = 8y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y^2$$

$f = 2x^3 + y^4$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}y^4 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \frac{1}{2}$$

donc max en

$(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ ou $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Or

$$f(0,\pm 1) = 1, \quad f(1,0) = 2, \quad f(-1,0) = -2, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{3^2}{16}$$

$$= \frac{13}{16}$$

Donc $\max\limits_{x^2+y^2\leq 1} f = 2$ $\left(\text{et } \inf\limits_{x^2+y^2\leq 1} f = -2\right)$.

$$\forall\, x^2+y^2 \leq 1, \quad 2x^3+y^4 \leq 2.$$

Fin du cours.

N'hésitez pas à m'envoyer des questions (si vous en avez) avant les examens...

Bonnes révisions...