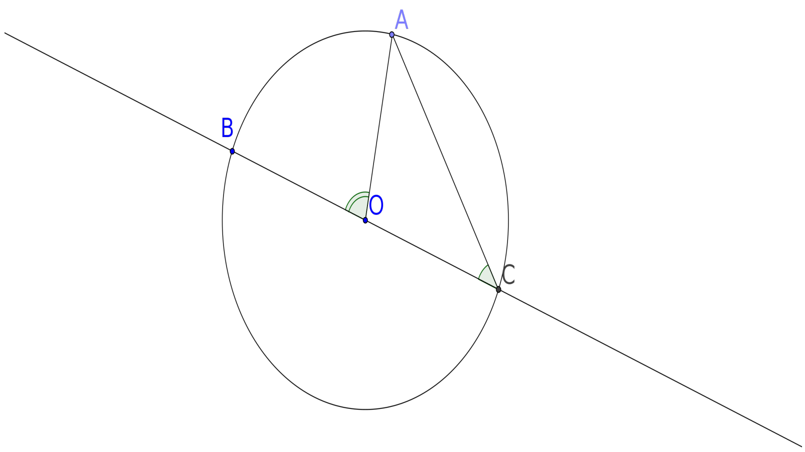
Puissance d'un point par rapport à un cercle

1 Théorème de l'angle inscrit

Théorème. Soient A, B, C trois points sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Alors $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 2(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}) \bmod 2\pi$.

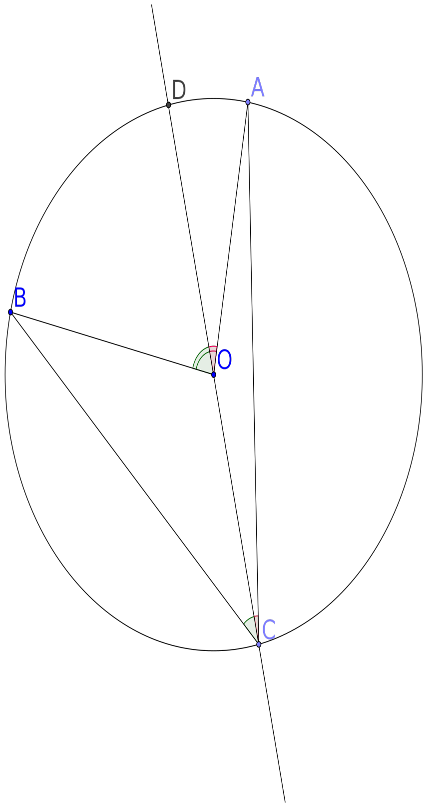
Démo. Cas où [CA] est un diamètre. Comme le triangle OCB est isocèle en O, $(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CO}}) = (\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \Rightarrow (\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \pi - (\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CO}}) - (\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \pi - 2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CO}}) = \pi - 2(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})$.

Or, O, C, A sont alignés donc



$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \pi - (\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 2(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})$.

Cas général. Soit D l'intersection de (OC) avec le cercle de sorte que [CD] est un diamètre.



D'après le cas précédent, on a :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) + 2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

2 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Définition. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Si P est un point du plan, on appelle **puissance de P par rapport au cercle $\mathcal{C}$** le nombre $\Pi_{\mathcal{C}}(P) = \mathrm{OP}^2 - r^2$.

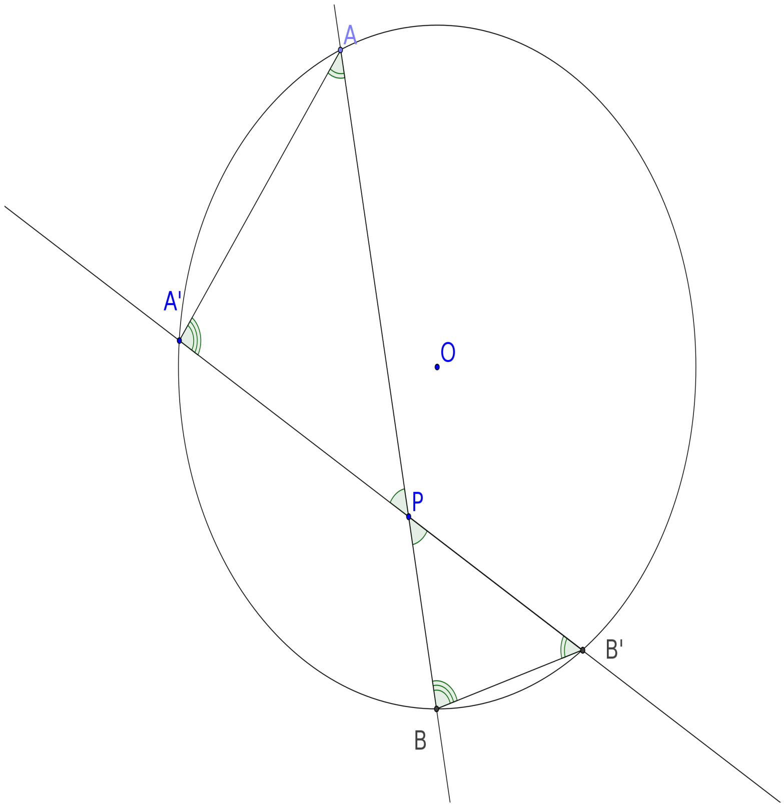
Théorème. Soit P un point quelconque. Soit $\mathcal{C}$ un cercle. Si d est une droite qui passe par P et qui coupe le cercle en deux points A, B, si d' est une autre droite qui coupe le cercle en A', B', alors $\mathrm{PA.PB} = \mathrm{PA'.PB'} = \Pi_{\mathcal{C}}(P)$

Remarques.

1) Dans le cas où [AB] est un diamètre, c'est évident car (par exemple si P est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$), on a $\mathrm{PA.PB} = (\mathrm{OP} + r)(\mathrm{OP} - r) = \mathrm{OP}^2 - r^2$.

2) Si d' est une tangente au cercle issue de P qui intersecte le cercle en C, alors $\mathrm{PA.PB} = \mathrm{PC}^2$

Démo. Les triangles $\mathrm{PAB'}$ et $\mathrm{PBA'}$ sont *semblables.*



En effet, soit O le centre du cercle. On a les égalités d'angles :

$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}, \overrightarrow{\mathrm{PB}'}) = (\overrightarrow{\mathrm{PB}}, \overrightarrow{\mathrm{PA}'})$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}'}, \overrightarrow{\mathrm{AP}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AB}'}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}'}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'B}) = (\overrightarrow{A'P}, \overrightarrow{A'B})$ *(d'après le théorème de l'angle inscrit)*

de même :

$(\overrightarrow{B'P}, \overrightarrow{B'A}) = (\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'A}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}'}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = (\overrightarrow{\mathrm{BA}'}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}) = (\overrightarrow{\mathrm{BA}'}, \overrightarrow{\mathrm{BP}})$

D'où l'égalité du rapport de longueurs :

$\frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}'} \Leftrightarrow \mathrm{PA}'.\mathrm{PB}' = \mathrm{PA}.\mathrm{PB}.$

qed