FICHE N°1 :

Exercice 1. Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe est toujours distingué.

Exercice 2. Soit G un groupe.

a) Montrer que si x^2 est l'élément neutre pour tout $x \in G$, alors G est abélien.

b) Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un endomorphisme de G si et seulement si G est abélien.

Exercice 3.

a) Donner un groupe non fini mais d'exposant fini.

b) Montrer que $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1-x$ sont des éléments d'ordre 2 dans le groupe des bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que le groupe engendré par ces deux éléments est le groupe des bijections affines de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

c) Déterminer l'ordre des matrices

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et montrer que A et B engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 4. Soit d un entier positif divisant l'ordre d'un groupe cyclique G. Combien G a-t-il de sous-groupes d'ordre d ?

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif et $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On munit $\mathbb{K}^n$ de la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ définie par

$$(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^n y_i\mathbf{e}_i) := \sum_{i=1}^n x_iy_i,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Considère l'application définie par

$$\phi : \mathfrak{S}_n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n; \qquad (\sigma, \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)}\mathbf{e}_i.$$

a) Montrer que ϕ définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{K}^n$.

b) Montrer que la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ est invariante par rapport à $\mathfrak{S}_n$, c.-à.d.,

$$(\sigma(x), \sigma(y)) = (x, y) \qquad x, y \in \mathbb{K}^n, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

c) Montrer que la droite vectorielle Δ engendré par $\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n$ et l'hyperplan Π défini par $\{\sum_i x_i\mathbf{e}_i | \sum_i x_i = 0\}$ sont préservés par l'action ϕ.

d) Montrer que si n est un multiple de la caractéristique de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}^n$ n'est pas la somme directe de Δ et Π.

Exercice 6. Soit n un entier tel que $n > 1$ et D_n le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par

$$A := \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe D_n est appelé le groupe diédral d'ordre $2n$.

a) Calculer l'ordre de D_n.

b) En déduire que le sous-groupe engendré par A est un sous-groupe distingué.

c) Décrire les classes de conjugaisons.

d) Montrer que D_n est isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\zeta := e^{2i\pi/n}$.

e) Déterminer l'ordre du sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\zeta := e^{2i\pi/n}$.

Exercice 7. Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

a) Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$.

b) Exhibez tous ses sous-groupes, ses sous-groupes distingués, son centre, et ses quotients.

c) En déduire que tous les sous-groupes propres sont distingués et cycliques.

Exercice 8. Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué et $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$ la projection canonique.

a) Montrer que la correspondance qui associe chaque sous-groupe $L \leq G/N$ à $\pi^{-1}(L)$ est une bijection entre les sous-groupes de G/N et les sous-groupes de G contenant N. En particulier, cette correspondance préserve les sous-groupes distingués et les indices des sous-groupes.

b) Soit G un p-groupe. Montrer que G possède des sous-groupes distingués de tous ordres divisant $\sharp G$ en utilisant le fait que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.
Indication: Argumenter par récurrence sur l'ordre de G.

Exercice 9. Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

a) Le sous-groupe $\{1, (1,2)\}$ est il distingué dans $\mathfrak{S}_n$? Quel est son normalisateur ?

b) Trouver le commutant de $c = (1, 2, \cdots, n)$ dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10. Soit n un entier strictement positif et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $I := \{1, 2, \cdots, n\}$. Pour $a_1, \cdots, a_k \in I$, on note $(a_1, \cdots, a_k)$ la permutation (appelée un cycle de longeur k) envoyant $a-1$ sur $a_2, \cdots, a_{k-1}$ sur a_k, a_k sur a_1 et fixant $j \in I \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$. L'ensemble $\{a_1, \cdots, a_k\}$ est appelé le support du cycle. Rappelons que

a) deux cycles de supports disjoints commutent et que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit d'une manière unique (à l'ordre près) comme le produit de cycles de supports disjoints et que

b) $\sigma(a_1, \cdots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_k))$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Alors, voici quelques exercices:

a) Calculer $(1, 2)(2, 3) \cdots (k-1, k)$.

b) Montrer que les transpositions (i.e., 2-cycles) engendrent $\mathfrak{S}_n$. En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $(1, 2), (2, 3), \cdots, (n-1, n)$.

c) A quelles conditions deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont-ils conjugués ? En déduire que le nombre des classes de conjugaisons est égal au nombre des partitions de n.

Exercice 11. *Soit* n un entier tel que $n \geq 3$.

a) Calculer $(1,2,3)(2,3,4)$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

b) Calculer $(1,2)(2,3)(1,2)(2,3)$. En déduire que $[\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n] = \mathfrak{A}_n$.

c) Trouver tous les morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.
Indication: Montrer que le noyau d'un tel morphisme contient $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 12. Soit G un sous-groupe abélien de $\mathfrak{S}_n$ agissant transitivement sur $\{1, \cdots, n\}$ pour l'action naturelle.

a) Montrer que le stabilisateur G_x de x est trivial.
Indication: Considèrer le lien entre G_x *et* G_y *pour* $y = h.x$ $(h \in G)$.

b) En déduire la cardinalité de G.

Exercice 13. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Le groupe G agit sur les classes à gauche de G modulo H par translation (i.e., $g.(g'H) := (gg')H \ \forall g, g' \in G$). Cela définit un morphisme

$$\rho : G \longrightarrow \mathfrak{S}(G/H).$$

a) Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}\rho$ est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H.

b) Soit G un groupe fini, p le plus petit diviseur premier de $\sharp G$. Montrer que tout sous-groupe d'indice p est distingué.

c) Montrer qu'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. *Indication: Considérer la restriction de* ρ *à* H, *un sous-groupe de* $\mathfrak{S}_n$ *d'indice* n.

Exercice 14. Formule de Burnside
Soit X un ensemble fini où agit un groupe G. Montrer que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = N$$

où X^g est l'ensemble des points fixes de g et N le nombre d'orbites de G.

Exercice 15. Soit M l'ensemble des applications de $G := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dans un ensemble X de trois éléments.

a) Montrer que le groupe G agit sur M par la formule suivante:

$$(\bar{i}.f)(\bar{x}) := f(\overline{x-i}) \qquad f \in M,\ \bar{i}, \bar{x} \in G.$$

b) Calculer la cardinalité de $M^G := \{f \in M | g.f = f \ \forall g \in G\}$.

c) Application: combien de colliers distincts (à rotation près) peut on faire avec 6 pierres parmi les suivantes rubis, saphir, émeraude ?

$4^\sharp$. Faire les mêmes questions pour le groupe D_6 d'ordre 12.

Exercice 16. Soit n un entier strictement positif, $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, appelé le groupe orthogonal de degré n. Considérons l'action naturelle:

$$\phi : O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \qquad (g, x) \longmapsto gx.$$

a) Montrer que l'action ϕ se restreint à la $(n-1)$-sphère $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| = 1\}$.

b) Montrer que l'action ϕ elle-même n'est pas transitive mais que la restriction $\phi|_{S_{n-1}}$ l'est.

Exercice 17.

a) Déterminer, à isomorphisme près, le groupe des isométries du plan qui préserve un triangle équilatéral, un carré, un polygone régulier de n côtés.

b) Déterminer, à isomorphisme près, le groupe des rotations de l'espace qui préserve un tétraèdre régulier centré en 0. En déduire le nombre de coloriages possibles avec k couleurs des faces d'un tétraèdre régulier à rotations près.

Exercice 18. Soit n un entier strictement positif et $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On note le groupe général linéaire de degré n du corps $\mathbb{K}$ par $GL_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices symétriques de degré n du corps $\mathbb{K}$ par $S_n(\mathbb{K})$. Considérons l'application suivante:

$$\phi : GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \longrightarrow S_n(\mathbb{K}); \qquad (g, A) \longmapsto gA^t g.$$

a) Montrer que ϕ est une action bien-définie.

b) Donner la décomposition de $S_n(\mathbb{K})$ en orbites pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et puis $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Indication: Interpréter $S_n(\mathbb{K})$ comme l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.

Exercice 19. Soit n un entier tel que $n > 1$ et r un entier strictement positif plus petit que n. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini d'ordre q. On appelle l'ensemble des sous-espace vectoriels de $\mathbb{K}^n$ de dimension r, *r-grassmanienne*, notée par $G(r, n)$.

a) Montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur $G(r, n)$ d'une manière naturelle.

b) Soit $V \in G(r, n)$ le sous-espace engendré par les premiers r vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Calculer le stabilisateur de V dans $GL_n(\mathbb{K})$.

c) En déduire la cardinalité de $G(r, n)$.

Exercice 20. Soit P le demi-plan de Poincaré. On considère l'application définie par

$$\phi : SL_2(\mathbb{R}) \times P \longrightarrow P; \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

a) Montrer que ϕ est une action bien-définie.

b) Montrer que cette action est transitive.

c) Calculer le stabilisateur de i dans $SL_2(\mathbb{R})$.
En déduire une réalisation de P comme quotient de $SL_2(\mathbb{R})$.