FICHE N°2 :

Exercice 1. Soient G, H deux groupes et $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme.

a) Montrer que si H est abélien, alors le noyau $\mathrm{Ker} f$ contient le sous-groupe dérivé $[G, G]$ de G.

b) Application : Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Montrer que si K est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2, alors $K = \mathfrak{A}_n$. *Indication : On pourra considérer une projection canonique* $\mathfrak{S}_n \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n/K$.

Exercice 2. Soit p un nombre premier.

a) Montrer que $PGL_2(\mathbb{F}_p)$ agit sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_p^2$.

b) En déduire qu'il existe un morphisme injectif de $PGL_2(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathfrak{S}_{p+1}$.

Exercice 3. Soit G un groupe et $Z(G)$ son centre.

a) Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique, G est abélien.

b) Application : Montrer que tout groupe d'ordre p^2 avec un nombre premier p est abélien.

Exercice 4. Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Montrer que le groupe des isométries d'un n-gone régulier est le groupe diédral D_n. *Indication : Considérer l'image des sommets adjacents.*

Exercice 5. Soit p un nombre premier et G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ qui est un p-groupe. On fait agir G sur $\mathbb{F}_p^n$ via $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$.

a) En décomposant $\mathbb{F}_p^n$ en G-orbites, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ dont le stabilisateur est G.

b) Montrer par récurrence qu'il existe une base $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de $\mathbb{F}_p^n$ telle que $G.x_1 = x_1$ et $G.x_i \in x_i + \mathbb{F}_p x_1 + \cdots + \mathbb{F}_p x_{i-1}$ pour $1 < i \leq n$.

c) En déduire que G est à conjugaison près un sous-groupe du groupe unipotent.

Exercice 6. Soit T un tétraèdre régulier et G_T le groupe des isométries de T.

a) Montrer que G_T est isomophe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$.

b) Montrer que pour tous $1 \leq i \neq j \leq 4$, G_T contient un isométrie qui correspond à la transposition (i, j). *Indication : Considérer un plan médiateur passant par deux sommets.*

c) En déduire que G_T est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 7. Soient C une cube et T, T' deux tétraèdres réguliers inscrits dans C. On note G_C, G_T le groupe des isométries de C et T, respectivement.

a) Montrer que pour tout $g \in G_T$, il existe un unique $\sigma \in G_C$ tel que $g = \sigma|_T$.
En déduire qu'il existe un morphisme injectif $\iota :\ G_T \hookrightarrow G_C$.

b) En considérant l'action de G_C sur $\{T, T'\}$, montrer que $\iota(G_T)$ est un sous-groupe de G_C d'indice 2.

c) En déduire la suite exacte courte suivante :

$$1 \longrightarrow G_T \xrightarrow{\iota} G_C \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Exercice 8. Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Montrer que $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9. On considère le sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$ défini par

$$V_4 := \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

a) Montrer que V_4 est un sous-groupe distingué.

b) Montrer que V_4 est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) En déduire que $\mathfrak{A}_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 10. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On considère la suite exacte :

$$1 \longrightarrow SL(2,\mathbb{K}) \xrightarrow{i} GL(2,\mathbb{K}) \xrightarrow{\text{dét}} \mathbb{K}^* \longrightarrow 1,$$

où i est l'inclusion naturelle. Montrer que $GL(2,\mathbb{K})$ est isomorphe au produit semi-direct de $SL(2,\mathbb{K})$ par $\mathbb{K}^*$.

Exercice 11. Soit T un tétraèdre régulier et $\mathcal{A}$ l'ensemble des paires d'arêtes opposées de T.

a) En considérant l'action induite de G_T sur $\mathcal{A}$, montrer qu'il existe un homomorphisme surjectif f de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathfrak{S}_3$.

b) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker} f$.

c) L'homomorphisme f admet-il une section ?

Exercice 12. Soit n un entier tel que $n > 1$ et ω une n-ième racine primitive d'unité. Soit G le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par $A := \sum_{i=1}^{n} \omega^{i-1} E_{i,i}$ et $B := E_{1,n} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}$, où $E_{i,j}$ $(1 \leq i,j \leq n)$ sont les matrices élémentaires.

a) Vérifier la relation $AB = \omega BA$.

b) En déduire que tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme $\omega^r A^s B^t$ avec $s,r,t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Exprimer le produit $\omega^{r_1} A^{s_1} B^{t_1} \cdot \omega^{r_2} A^{s_2} B^{t_2}$ sous la forme ci-dessus.

c) Montrer que le centre Z de G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

d) Montrer que G/Z est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

e) On suppose ici que n est un nombre premier. Soit U le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_p)$ engendré par $P = \mathbf{1}_3 + E_{1,2}$ et $Q = \mathbf{1}_3 + E_{2,3}$.

   a) Montrer que $U = \{\mathbf{1}_3 + N | N = (n_{i,j}) \text{ t.q. } n_{i,j} = 0 \ (i \geq j)\}$.

   b) Posons $Z = \mathbf{1}_3 + E_{1,3}$. Montrer que tout élément de U s'écrit de façon unique sous la forme $Z^r P^s S^t$ avec $s,r,t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   c) Exprimer le produit $Z^{r_1} P^{s_1} Q^{t_1} \cdot Z^{r_2} P^{s_2} Q^{t_2}$ sous la forme ci-dessus.

   d) En déduire qu'il existe un isomorphisme de U dans G.

Exercice 13.

a) Déterminer l'ordre du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ où q est le corps fini à q éléments.

b) Démontrer les isomorphismes suivants :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3,\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$$

(indication : pour le dernier isomorphisme trouver une inclusion de $G := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ dans A_6 et faire agir G sur A_6/G).

c) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \not\simeq S_4$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5) \not\simeq S_5$, $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4) \not\simeq A_8$.

Exercice 14. Soit K un corps commutatif. Soit $G := \mathrm{SL}_2(K)$. On note $B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in K^\times, b \in K \right\}$ et $Z := \{\pm I_2\}$.

On pose $s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que G agit transitivement sur $K^2 \setminus \{0\}$ via :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} .$$

Quel est le stabilisateur du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

b) Décrire les orbites pour l'action induite de B. En déduire que :

$$G = B \cup BsB \ .$$

c) Montrer que B est un sous-groupe propre maximal de G.

d) Montrer que Z est l'intersection de tous les conjugués de B.

e) Soit $H \leq G$ un sous-groupe distingué. Montrer que $H \subseteq Z$ ou $G' \leq H$ *(indication : vérifier que si $HB = B$, alors $HU = U$ où $U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K \right\}$).*

Exercice 15. Soient K un corps et n un entier > 1.

a) Soit G un groupe qui agit doublement transitivement sur un ensemble X. Montrer que le stabilisateur G_x d'un point $x \in X$ est un sous-groupe maximal de G.

On pose $G := \mathrm{SL}_n(K)$.

b) Quel est le centre Z de G ?

c) Montrer que G agit doublement transitivement sur $\mathbb{P}^{n-1}(K)$.

d) Soit P le stabilisateur de la droite $K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ dans G. Montrer que l'intersection de tous les conjugués de P est le centre Z de G.

e) Soit $N \leq G$ un sous-groupe distingué. Montrer que si $N \not\leq Z$, alors $NP = G$.

On suppose $NP = G$.

f) Soit A le sous-groupe de G formé des matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array} \right)$$

où $x \in \mathcal{M}_{1,n-1}(K)$. Montrer que A est un sous-groupe distingué de P et que les conjugués de A engendrent G. En déduire que $G = AN$ puis que $G' \subseteq N$ *(indication : vérifier que G/N est abélien).*

g) Montrer que si $n \geq 3$ ou si $n = 2$ et $|K| \geq 3$, alors le groupe $\mathrm{PSL}_n(K)$ est simple.