FICHE N°3 (suite):

Exercice 1.

a) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle a \ : \ a^n = 1\rangle$.

b) Montrer que D_n le groupe diédral d'ordre $2n$ est isomorphe à :

$$\langle a, b \ : \ a^2 = b^n = (ab)^2 = 1\rangle \ .$$

c) Montrer que $D_\infty \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = 1\rangle$ où D_∞ est le groupe des bijections affines $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lambda x + \mu$.

Exercice 2. Montrer que $(\mathbb{Q}, +) \simeq \langle x_n, n \geq 1 \ : \ x_n = x_{nk}^k, k, n \geq 1\rangle$ *(indication : montrer que tout élément non trivial du membre de droite s'écrit sous la forme $x_p^{\pm q}$, $p, q \geq 1$ et justifier l'existence d'un morphisme de groupes $x_n \mapsto 1/n$).*

Exercice 3. Donner une présentation de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ avec 2 générateurs.

Exercice 4.

a) Montrer : $S_4 \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1\rangle$.

b) Montrer : $A_4 \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1\rangle$.

c) Montrer : $A_5 \simeq \langle a, b, c \ : \ a^2 = b^3 = c^5 = abc = 1\rangle$ *(montrer que le sous-groupe engendré par c est d'indice ≤ 12).*

Exercice 5. Soit Q_8 le groupe des quaternions d'ordre 8. Montrer que $Q_8 \simeq \langle a, b : a^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}, a^{-1}ba = b^{-1}, a^2 = b^2\rangle$.

Exercice 6. Montrer que le groupe $\langle a, b, c \ : \ a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2\rangle$ est trivial.

Exercice 7. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle a, b \ : \ a^4 = 1, a^2 = b^3\rangle$ *(indication : remarquer que a^2 est dans le centre).*

Exercice 8. Soit $G = \langle x, y\rangle$ le groupe libre engendré par deux éléments.

a) Montrer que x^2, y^3 engendrent un groupe isomorphe à G.

b) Montrer que x^2, y^2, xy engendrent un groupe isomorphe au groupe libre à 3 générateurs.

Exercice 9. Montrer que $\langle a, b \ : \ a^7 = b^3 = bab^{-1}a^{-2} = 1\rangle$ est le seul groupe non abélien d'ordre 21 (à isomorphisme près).