FICHE N°3 :

Exercice 1. Trouver tous les sous-groupes de $\mathfrak{A}_5$ d'ordre $15, 20$ ou 30.

Exercice 2.

a) Trouver tous les produits semi-directs de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Trouver tous les produits semi-directs de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) Soit d_n le groupe diédral d'ordre $2n$. A-t-on $D_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

d) Le groupe des quaternions d'ordre 8 peut-il s'écrire comme un produit semidirect ?

Exercice 3.

a) Existe t-il une injection de $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathfrak{A}_4$?

b) Existe t-il une surjection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_{n-1}$?

Exercice 4. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G, et N un sous-groupe distingué de G. Le but de cet exercice est de montrer l'isomorphisme suivant:

$$HN/N \cong H/H \cap N.$$

Soit f la projection canoninique de G dans G/N et H' l'image de H par f.

a) En calculant $f^{-1}(H')$, montrer que H' est isomorphe à HN/N.

b) En calculant $\mathrm{Ker} f|_H$, montrer que H' est isomorphe à $H/H \cap N$.

c) Conclure.

Exercice 5. Soit G_i, H_i $(1 \leq i \leq 5)$ groupes. Supposons que les morphismes $f_i : G_i \longrightarrow H_i$ et le diagramme commutatif suivant avec les deux suites horisontales exactes sont données:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] \arrow[d] & G_3 \arrow[r] \arrow[d] & G_4 \arrow[r] \arrow[d] & G_5 \arrow[d] \\
H_1 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H_4 \arrow[r] & H_5
\end{tikzcd}.$$

a) Montrer que si f_1 est surjective et f_2, f_4 sont injectives, alors f_3 est injective.

b) Montrer que si f_5 est injective et f_2, f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective.

Ce résultat est connu et appelé **5-lemme**.

Exercice 6. Soit X un ensemble sur lequel le groupe $\mathfrak{S}_5$ agit d'une manière non-triviale. Montrer que l'action n'est pas fidèle si et seulement si $\mathfrak{S}_5$ agit par involution.

Exercice 7. Soit n un entier tel que $n > 1$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit B, T et U les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures, des matrices diagonales, et des matrices unipotentes supérieures. Montrer que B est isomorphe au produit semi-direct $T \ltimes U$.

Exercice 8. Ici, on détermine la structure du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

a) En considérant l'image d'un élément d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un automorphisme, montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$.

b) Soit $f, g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que

$$f(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{j}, \bar{i}), \quad g(\bar{i}, \bar{j}) = (\overline{i+j}, \bar{j}) \qquad \bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Montrer que f et g satisfont $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$ et $(f \circ g)^3 = \mathrm{id}$.

c) Conclure.

Exercice 9. Ici, on va montrer que $G = PGL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ différemment.

a) En faisant agir G sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$, montrer-le.

b) On considère l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{F}_2^3$.

(a) Montrer que cette action stabilise l'hyperplan $\{(x, y, z) | x + y + z = 0\}$.

(b) Conclure.

[a)]

c) Montrer que $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En déduire que $PGL_2(\mathbb{F}_2) = GL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 10. Déterminer si les groupes $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/81\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 11. Déterminer la condition sur les entiers positifs a, b pour laquelle on a

$$\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}.$$

Exercice 12. Soit m et n deux entiers strictement positifs et $H(m, n)$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $H(m, n)$ est un groupe abélien pour l'addition des morphismes $(\varphi + \psi)(i) := \varphi(i) + \psi(i)$.

a) Montrer qu'un élément φ de $H(m, n)$ est uniquement déterminé par $\varphi(1)$.

b) Soit d le PGCD de m et n. Montrer que l'ordre de $\varphi(1)$ divise d.

c) Montrer que les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dont l'ordre divise d sont les classes de multiples de a, où $m = ad$ et déduire que $\varphi(1)$ définit un générateur de $H(m, n)$.

d) En déduire que $H(m, n) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Exercice 13. Soit n un entier tel que $n > 1$ et $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

a) Montrer que $\bar{k}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si $\bar{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) En déduire que G est isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Exercice 14. Soient n un entier strictement positif et p un nombre premier.

a) Supposons que p est impair.

i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(a, k) = 1 \qquad \text{et} \qquad (1 + p)^{p^k} = 1 + ap^{k+1}.$$

ii) En déduire que $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}(p - 1)\mathbb{Z}$.

b) Supposons que $p = 2$.

i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier impaire $a \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$5^{2^k} = 1 + a2^{k+2}.$$

ii) En déduire que $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$.

c) Donner la structure de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ pour $N > 1$.

Exercice 15. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est-il simple ?

Exercice 16. Soit G le groupe défini par $\langle x, y | x^2 = y^3 = e\rangle$. Le but de cet exercice est de montrer que G est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{Z})$. Admettons le fait que $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Notons l'image de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par la projection canonique $SL(2,\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow PSL(2,\mathbb{Z})$ par A et B, respectivement.

   i) Montrer que $A^2 = B^3 = \mathbf{1}_2$.

   ii) En déduire qu'il existe un morphisme surjectif φ de G dans $PSL(2,\mathbb{Z})$.

c) Posons $\xi = xy$ et $\eta = xy^{-1}$. Montrer que tout élément de G peut s'écrire sous la forme $x^{\varepsilon}\xi^{m_1}\eta^{n_1}\cdots\xi^{m_r}\eta^{n_r}x^{\varepsilon'}$ oú $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0,1\}$ et $m_i, n_i \in \mathbb{N}$.

d) Expliciter $\xi' := \varphi(\xi)$ et $\eta' := \varphi(\eta)$. En déduire que le module de la somme des composantes de $\xi'^{m_1}\eta'^{n_1}\cdots\xi'^{m_r}\eta'^{n_r}$ est au moins 3 sauf si $m_1 = n_1 = \cdots = m_r = n_r = 0$.

e) Conclure.

Exercice 17. Soit $G = \langle a, b | aba = bab\rangle$ le groupe de tresse de trois cordes. Posons $x = ab^2$ et $y = ab$.

a) Montrer que G est engendré par x et y.

b) Montrer que $x^2 = y^3 \in Z(G)$.

c) Calculer les commutateurs $[x, y]$ et $[x, y^2]$. En déduire que $Z(G)$ est engendré par $x^2 = y^3$.

d) En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Exercice 18. Soit G un groupe abélien fini. Soient $d_1, ..., d_r$ les entiers ≥ 2 tels que :

$$d_1 | d_2 | ... | d_r$$

$$\text{et } G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \ .$$

a) Exprimer le produit $d_1 ... d_r$ à l'aide de G.

b) Montrer que $d_r\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ ^{\forall}g \in G,\ g^n = 1\}$.

c) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme de E. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $v \in E$, on pose $P.v := P(u)(v)$.

   On suppose qu'il existe $P_1, ..., P_r \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes unitaires non constants tels que :

$$P_1 | ... | P_r$$

   dans $\mathbb{C}[X]$ et

$$E \simeq \mathbb{C}[X]/(P_1) \oplus ... \oplus \mathbb{C}[X]/(P_r)$$

   comme $\mathbb{C}[X]-$modules.

d) Montrer que P_r est le polynôme minimal de u et $P_1 ... P_r$ son polynôme caractéristique. Trouver la liste $P_1, ..., P_r$ dans le cas où E est de dimension 3 et où u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans une base.

Exercice 19. Soit G un groupe. On pose $G^\vee := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ (muni de la multiplication à l'arrivée *i.e.* : $\phi_1\phi_2 : g \mapsto \phi_1(g)\phi_2(g)$).

a) Montrer que $G^\vee$ est un groupe abélien.

b) Déterminer $G^\vee$ pour $G = S_n, A_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si G est abélien fini, alors $G^\vee \simeq G$.