Université Claude Bernard
Master 1 Algèbre

FICHE N°5 :

Exercice 1. Quel est le dernier chiffre d'écriture décimale de 7^{3^9} ?

Exercice 2. Trouver les trois dernier chiffres de 777^{401}.

Exercice 3. Trouver tous les entiers n tels que $8n$ congru à 1 mod. 13.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif.

a) Soit $x \in A$ un élément inversible et $y \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $x + y$ est inversible.

b) Soit x et y deux éléments nilpotents de A. Montrer que $x + y$ est nilpotent.

Exercice 5. Soit A un anneau intègre et $d \in A \setminus A^*$ un élément non nul.

a) Montrer que tout idéal de $A\left[\frac{1}{d}\right]$ s'écrit sous la forme $IA\left[\frac{1}{d}\right]$, où I est un idéal de A.

b) En déduire que, si A est principal, $A\left[\frac{1}{d}\right]$ l'est aussi.

c) Montrer que $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ puis que $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ sont des anneaux principaux.

d) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ n'est pas principal.

Exercice 6. Soit $\mathbb{D}$ l'anneau des décimaux.

a) Quels sont les irréductibles ?

b) Calculer le PGCD de $0,77$ et 910.

Exercice 7. Posons $A := \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On définit l'application $N : A \to \mathbb{Z}$ par $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

a) Montrer que, pour tous $x, y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) Montrer que $|A^*| = \infty$.

c) Trouver tous les diviseurs de 14 mod. A^*.

Exercice 8. Soit $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

a) Déterminer A^*. Ensuite, trouver tous les diviseurs de 12.

b) Posons $I := (2, 1 + \sqrt{-5}) \subset A$. Calculer I^2.

c) Posons $J := (4, 1 - \sqrt{-5}) \subset A$. Calculer $I + J$ et IJ.

Exercice 9. Soit $A := \mathbb{Z}[i]$, l'anneau des entiers de Gauss.

a) Montrer que $A/(7) \cong \mathbb{F}_7[X]/(X^2+1)$.

b) En déduire que 7 est irréductible dans A.

c) Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{F}_{p^2}$. Montrer que ce n'est pas vrai si $p = 2$.

Exercice 10. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $A = \mathbb{K}[[X]]$ l'anneau des séries formelles d'une variable. Notons la valuation standard de A par ν.

a) Quel sont les inversibles de A ?

b) Soit $P, Q \in \mathbb{K}[[X]]$ tels que $\nu(P) \leq \nu(Q)$. Montrer que P divise Q.

c) En déduire que A est principal.

d) Montrer qu'il existe un et un seul idéal maximal. On le note par $\mathfrak{m}$.

e) Montrer que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$.

f) Notons $\mathbb{K}((X))$ le corps des fractions de $\mathbb{K}[[X]]$.

   (a) Montrer que $\mathbb{K}((X)) = \{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \mid \exists\, i \text{ t.q. } a_k = 0 \ (\forall\, k < i)\}$.

   (b) En déduire que, pour tout $f \in \mathbb{K}((X)) \setminus \{0\}$, on a soit $f \in \mathbb{K}[[X]]$ ou bien $f^{-1} \in \mathbb{K}[[X]]$.

Exercice 11. Soit X un espace topologique et $\mathcal{C}(X)$ l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$. (Il est connu que, lorsque X est compact, $\mathcal{C}(X)$ est une C^*-algèbre commutative avec unité.) Montrer que, pour tout $P \in X$, $\mathfrak{m}_P := \{f \in \mathcal{C}(X) | f(P) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}(X)$.

Exercice 12. On sait que l'anneau $A = \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ n'est pas euclidien. Le but de cet exercice est de montrer que A est principal.

1. Montrer que si a et b sont non nuls dans A, alors on peut trouver $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$, ou $2a = bq + r$, avec $N(r) < N(b)$.

2. a) Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
   b) En déduire que $A/(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.
   c) Montrer que (2) est un idéal maximal de A.

3. Soit I un idéal de A et b un élément non nul de I de norme minimale. Soit $a \in I$. On suppose que $a = bq + r$. Montrer que $a \in (b)$.

4. On suppose ici que $2a = qb + r$.

   a) Montrer que $2a = qb$.
   b) On suppose que 2 divise q. Montrer que $a \in (b)$.
   c) On suppose maintenant que 2 ne divise pas q.
      a) Montrer que 2 divise b. On pose $b' := \frac{1}{2}b$.
      b) Montrer que 2 et q engendrent A comme idéal. En déduire que $b' \in I$.
      c) Conclure.

Exercice 13. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ et $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ sont des anneaux euclidiens.