Université Claude Bernard
Master 1 Algèbre

FICHE N°6 :

Exercice 1. Montrer que les seules solutions de $y^2 + 4 = x^3$ dans $\mathbb{Z}$ sont $(\pm 11, 5)$ et $(\pm 2, 2)$.

Exercice 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 3. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{K}[T^2, T^3]$, T^5 et T^6 n'ont pas de PGCD. D'ici, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Exercice 4. Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XZ - Y^2)$ n'est pas factoriel. (*On pourra montrer que cet anneau est isomorphe à* $\mathbb{C}[U^2, UV, V^2] \subset \mathbb{C}[U,V]$.)

Exercice 5.(**Critère de réduction**) Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions, p un élément irréductible de A et $\overline{K}$ le corps des fractions de $A/(p)$. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ tel que $p \nmid a_n$ et $\overline{P} = \sum_{i=0}^n \overline{a}_i X^i$ est un polynôme irréductible de $\overline{K}[X]$, où $\overline{a}_i$ est l'image de a_i par la projection canonique $A \twoheadrightarrow A/(p)$. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ (et donc dans $A[X]$ si le pgcd de ses coefficients est 1). En considérant la réduction modulo 3, montrer que $X^3 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 6. (**Critère d'Eisenstein**) Soient A un anneau factoriel et K son corps des fractions. Soient q un élément irréductible de A et $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ un polynôme de $A[X]$ vérifiant: $q \nmid a_n, q | a_i$ pour $0 \le i < n$ et $q^2 \nmid a_0$. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ (et donc dans $A[X]$ si le pgcd de ses coefficients est 1). En déduire que pour tout nombre premier p, $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 7. Etudier l'irréductibilité de $X^2 + Y^2 + Z^2$ sur $\mathbb{K}$.

Exercice 8. Factoriser $X^4 - 2$ sur $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$.

Exercice 9. L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas de solution de l'équation suivante dans $\mathbb{Z}^3$:

$$X^3 + Y^3 = Z^3, \qquad XYZ \neq 0. \tag{1}$$

Par l'absurde, on suppose qu'il en existe une. Suppose que (X, Y, Z) est une solution de (1) telle que $|XYZ|$ soit minimal.

a) Montrer que X, Y ou Z est pair.

   On supposera dans la suite que Z est pair.

b) Montrer que X et Y sont premiers entre eux.

c) Soient $U, V \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tels que $X = U + V$ et $Y = U - V$. Montrer que U et V sont des entiers qui sont premiers entre eux et que U et V ont de parités différentes.

d) On suppose que $3 \nmid Z$. Montrer qu'il existe $S, W \in \mathbb{Z}$ tels que $2U = S^3$ et $U^2 + 3V^2 = W^3$.

e) (Fait en cours) En travaillant dans $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$, montrer que

$$2U = (2a + b)(a - b)(a + 2b), \qquad 2V = 3ab(a + b),$$

   avec les entiers a et b premiers entre eux.

f) Montrer que $a - b, a + 2b$ et $2a + b$ sont des cubes. En déduire une plus petite solution de (1).

g) Traiter le cas où $3|Z$.