Université Claude Bernard
M1 Algèbre

# FICHE N°7 :

**Exercice 1** *Montrer que le polynôme* $XY - ZT$ *est irréductible dans* $\mathbb{C}[X, Y, Z, T]$.

**Exercice 2** *Déterminer les idéaux maximaux des anneaux suivants :*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \mathbb{R}[X]/(X^2),\ \mathbb{R}[X]/(X^2 - 3X + 2),\ \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)\ .$$

**Exercice 3** *Soient* $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ *deux polynômes sans facteur communs. On suppose* $f, g$ *non constants.*

*a) Montrer qu'il existe* $d \in \mathbb{C}[X]$, $A, B \in \mathbb{C}[X, Y]$ *tels que :*

$$d = Af + Bg\ .$$

*b) Montrer que l'ensemble*

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2\ :\ f(x, y) = g(x, y) = 0\}$$

*est fini.*

*c) Montrer que* $\mathbb{C}[X, Y]/(f, g)$ *est de dimension finie.*

**Exercice 4** *a) Déterminer les idéaux maximaux de* $\mathbb{C}[X]$.

*b) Donner une bijection entre l'ensemble des idéaux maximaux de* $\mathbb{R}[X]$ *et* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

*c) Soient* $a, b \in \mathbb{C}$. *Montrer que l'idéal* $m_{a,b} := (X - a, Y - b)$ *de* $\mathbb{C}[X, Y]$ *est maximal.*

*d) Soit* $P$ *un idéal premier non nul de* $\mathbb{C}[X, Y]$.
*Montrer que* $P$ *contient un* $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ *irréductible. Si* $P$ *est maximal, montrer que* $P$ *n'est pas principal.*

*e) Soit* $M$ *un idéal maximal de* $\mathbb{C}[X, Y]$. *Montrer que* $M = m_{a,b}$ *pour certains* $a, b \in \mathbb{C}$.

**Exercice 5** *a) Montrer que le corps des fractions de* $\mathbb{R}[X^2, X^3]$ *est* $\mathbb{R}(X)$.

*b) Montrer que l'anneau* $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ *est intègre et que son corps des fractions est isomorphe à* $\mathbb{R}(t)$.