# Le groupe $\langle a, b, c \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle$ est trivial.

Notons :

(1) $a^{-1}ba = b^2$

(2) $b^{-1}cb = c^2$

(3) $c^{-1}ac = a^2$

On a : (1) $\Rightarrow$ $a^{-2}ba^2 = a^{-1}(a^{-1}ba)a$

$= a^{-1}b^2a$

$= (a^{-1}ba)^2$

$= b^4$

Donc : $ba^2 = a^2b^4 \Rightarrow a^2 = b^{-1}a^2b^4$

$\Rightarrow c^{-1}ac = (b^{-1}c^{-1})ac\,b^4$

Or (2) $\Rightarrow$ $b^{-1}c^{-1}b = (b^{-1}cb)^{-1} = c^{-2}$

$\Rightarrow b^{-1}c^{-1} = c^{-2}b^{-1}$

D'où : $c^{-1}ac = (c^{-2}b^{-1})ac\,b^4$

$\Rightarrow ac = c^{-1}(b^{-1}a)cb^4$

Or (1) $\Rightarrow$ $a^{-1}b^{-1}a = b^{-2} \Rightarrow b^{-1}a = ab^{-2}$

Donc : $ac = \underline{c^{-1}a}b^{-2}cb^4$

$= (a^2c^{-1})b^{-2}cb^4$

$\Rightarrow c = ac^{-1}b^{-2}cb^4$

$\Rightarrow c = ac^{-1}(c^4b^{-2})b^4$ car (2) $\Rightarrow b^{-2}cb^2 = c^4$

$\Rightarrow b^{-2}c = c^4b^{-2}$

$\Rightarrow c = ac^3b^2$

$\Rightarrow a = cb^{-2}c^{-3}$

On $(b^{-2}cb^2)^{-3} = (c^4)^{-3}$

$\Rightarrow b^{-2}c^{-3}b^2 = c^{-12}$

$\Rightarrow b^{-2}c^{-3} = c^{-12}b^{-2}$

Ainsi : $a = c(c^{-12}b^{-2})$

$= c^{-11}b^{-2}$

On reporte dans (1) :

$(c^{-11}b^{-2})^{-1} b (c^{-11}b^{-2}) = b^2$

$\Rightarrow b^2 c^{11} b c^{-11} b^{-2} = b^2$

$\Rightarrow b^{-1} c^{11} b c^{-11} = b$

$\Rightarrow (c^2)^{11} c^{-11} = b$

$\Rightarrow c^{11} = b$

Donc (2) $\Rightarrow c^{-11} c c^{11} = c^2$

$\Rightarrow c = c^2$

$\Rightarrow c = 1$

Puis $c = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1$

qed.