# Examen partiel

vendredi 23 novembre 2012

durée : 2h

*documents et calculatrices interdits*

Soit $D_4$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices :

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(rédaction)

1 + 2 — 1) Montrer que $D_4 \simeq \langle r, s \ :\ r^4 = s^2 = (sr)^2 = 1\rangle$.

2 — 2) Montrer que tous les sous-groupes d'ordre 8 de $\mathfrak{S}_4$ sont isomorphes à $D_4$ *(indication : on pourra considérer* $(1234)$ *et* $(24)$*).*

2 — 3) Combien y a-t-il de 2−Sylow dans $\mathfrak{S}_4$ ? Combien y a-t-il de 3−Sylow dans $\mathfrak{S}_4$ ?

1 — 4) Soit $P$ un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre 8. On pose $N(P) := \{g \in G : gPg^{-1} = P\}$. Montrer que $N(P) = P$.

1 — 5) On rappelle que $\mathfrak{A}_4$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ : INUTILE DE LE REDÉMONTRER. En déduire que $\mathfrak{S}_4$ est engendré par $(1234)$ et $(132)$.

1 — 6) Soit $G_1 := \langle a, b \ :\ a^4 = b^3 = (ab)^2 = 1\rangle$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe un morphisme surjectif $G_1 \to \mathfrak{S}_4$.

0,5 + 2 — 7) Montrer que dans $G_1$, $bab = a^{-1}$ puis que $(ab^2)^4 = (b^2ab^2)^2 = 1$.

0,5 — 8) On note $H_1$ le sous-groupe de $G_1$ engendré par $a$ et $b^2ab^2$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $D_4 \to H_1$.

1,5 — 9) Montrer que $G_1/H_1 = H_1 \cup bH_1 \cup b^2H_1$.

0,5 — 10) En déduire que $|G_1| \leqslant 24$ et que $G_1 \simeq \mathfrak{S}_4$.

3 — 11) Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ formé par les matrices :

$$\pm 1,\ \pm I, \pm J,\ \pm K$$

où $1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $K := \begin{pmatrix} 0 & +i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

ON NE DEMANDE PAS DE VÉRIFIER QUE $\mathbb{H}_8$ EST UN GROUPE.

Montrer que $\mathbb{H}_8$ est isomorphe au groupe

$$\langle x, y \ :\ x^2 = y^2 = (xy)^2\rangle .$$

0,5 — 12) Déterminer $E$ l'ensemble des 6 éléments d'ordre 4 de $\mathbb{H}_8$. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ agit sur $E$ par :

$$\forall\, \phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8),\ \forall\, x \in E,\ \phi.x := \phi(x) .$$



tourner la page ...

3 13) Si $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$, montrer que $\phi(-1) = -1$.
Montrer que le stabilisateur de $I$ est d'ordre $\leqslant 4$. En déduire que $|\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)| \leqslant 24$.

14) En utilisant la présentation de $\mathbb{H}_8$ de la question 11) ci-dessus, justifier l'existence de deux éléments $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ tels que :

2

$$\phi_1 : I \mapsto -J,\ J \mapsto I\ ;\ \phi_2 : I \mapsto -J,\ J \mapsto K\ .$$

1,5+1 15) Montrer que dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$, $\phi_1$ est d'ordre 4, $\phi_2$ d'ordre 3 et $\phi_1\phi_2$ d'ordre 2. En déduire qu'il existe un morphisme $\psi : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$ dont l'image contient $\phi_1, \phi_2$.

2 16) Montrer que l'ordre de im $\psi$ est divisible par 12. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ n'a pas de sous-groupe distingué d'ordre 2 et en déduire que $\psi$ est un isomorphisme.

17) Soient $\sigma := (123)$, $\tau := (12) \in \mathfrak{S}_3$. On admet qu'il existe un morphisme de groupes $\Phi : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)$, tel que :

$$\Phi(\sigma) : I \mapsto J,\ J \mapsto K \quad \Phi(\tau) : I \mapsto K,\ K \mapsto I\ .$$

0,5 On considère le produit semidirect :

$$G := \mathbb{H}_8 \rtimes_\Phi \mathfrak{S}_3\ .$$

quel est l'ordre de $G$ ?

18) Dans $G$ calculer :

3

$$(I,\tau)^4,\ (J,\sigma)^3,\ ((I,\tau)(J,\sigma))^2\ .$$

19) En déduire l'ordre de $(I,\tau)$ dans $G$ et qu'il existe un morphisme surjectif : $G \to \mathfrak{S}_4$ *(indication : montrer que $G/\langle (I,\tau)^4 \rangle \simeq \mathfrak{S}_4$).*

3