M1 ALGÈBRE

Corrigé de l'examen du 23/11/12

1) Soit $G := \langle r, s \mid r^4 = s^2 = (sr)^2 = 1 \rangle$

Il existe un morphisme surjectif de groupes $\varphi : \mathcal{L}_2(r,s) \to D_4$
$$r \mapsto R$$
$$s \mapsto S$$

Or dans D_4, $R^4 = S^2 = 1 = (SR)^2$

on en déduit un morphisme $\overline{\varphi} : G \to D_4$ surjectif.
$$r \mapsto R$$
$$s \mapsto S$$

Or dans G, on a $(sr)^2 = 1 \iff sr = r^{-1}s^{-1}$

Donc tout élément de G est de la forme $r^i s^j$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

Comme $r^4 = s^2 = 1$, $G = \{ r^i s^j \mid i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \}$

est d'ordre ≤ 8. car $D_4 = \{ R^i, SR^i \mid i \in \mathbb{Z} \}$

Puisque R est d'ordre 4, D_4 est d'ordre 8 d'où :

$\overline{\varphi} : G \to D_4$ est un isomorphisme.

2) On a $|\mathfrak{S}_4| = 24 = 2^3 \times 3$.

Tous les sous-groupes d'ordre 8 de $\mathfrak{S}_4$ sont des 2-Sylow et sont isomorphes car conjugués.

Posons $c = (1234)$, $t = (24)$.

On a c d'ordre 4, t d'ordre 2 et $ct = (12)(34)$ est d'ordre 2. Soit $P = \langle c, t \rangle$. Comme $t \notin \langle c \rangle$, P est d'ordre > 4.

Comme dans 1), il existe un morphisme surjectif

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow \langle c, t\rangle \\ r &\longmapsto c \\ s &\longmapsto t \end{aligned}$$

Donc $|H|$ divise 8. Comme $4 < |H|$, $|H| = 8$ et ψ est un isomorphisme.

Donc $H \simeq D_4$ ainsi que tous les sous-groupes d'ordre 8 de D_4

3) Soient n_2, n_3 les nombres de 2-Sylow et 3-Sylow.

On a $n_2 \mid 3$ et $n_2 = 1 \bmod 2$.

Or H qui est un 2-Sylow n'est pas distingué dans σ_4

En effet : $H = \{1, (1234), (13)(24), (1432), (24), (12)(34), (13), (14)(32)\}$

Si H était distingué, H contiendrait toutes les transpositions et on aurait $H = \sigma_4$ absurde.

Donc $n_2 > 1$. D'où $n_2 = 3$.

On a $n_3 = 1 \bmod 3$ et $n_3 \mid 8$

Donc $n_3 = 1$ ou 4.

Or le sous-groupe $\langle (123) \rangle$ est un 3-Sylow de σ_4 qui n'est pas distingué donc $n_3 = 4$

4) On a $n_2 = \left|\frac{\mathfrak{S}_4}{N(P)}\right| = 3$

Or $P \leq N(P) \Rightarrow 8 \mid |N(P)|$

donc $|N(P)| = 8$ et $N(P) = P$

5) Soit $K := \langle (1234), (132) \rangle$

Comme (1234) est d'ordre 4 et (132) d'ordre 3,

comme 3 et 4 sont premiers entre eux, $|K|$ est un multiple de 12

donc : $|K| = 12$ ou 24.

Si $|K| = 12$, alors $K = \mathfrak{A}_4$: absurde car $(1234) \notin \mathfrak{A}_4$.

Donc $|K| = |\mathfrak{S}_4| = 24$!

Donc $K = \langle (1234), (132) \rangle = S_4$

6) Il existe un morphisme surjectif

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathcal{L}_2(a, b) &\longrightarrow \mathfrak{S}_4 \\ a &\longmapsto (1234) \\ b &\longmapsto (132) \end{aligned}$$

Or $(1234)^4 = (132)^3 = (\underbrace{(1234)(132)}_{=(14)})^2 = 1$

D'où un morphisme surjectif $\overline{\varphi_1} : G_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_4$

$$\begin{aligned} a &\longmapsto (1234) \\ b &\longmapsto (132) \end{aligned}$$

7) Dans G_1, on a :

$$(ab)^2 = 1 \iff abab = 1$$
$$\iff bab = a^{-1}$$

On a aussi : $(ab^2)^4 = ab^2ab^2ab^2ab^2$
$$= ab\,a^{-1}(bab)(bab^2)$$
$$= aba^{-1}a^{-1}a^{-1}b$$
$$= ab\,a^{-3}b$$

Or $a^4 = b^3 \Rightarrow a^{-4} = b^{-3}$
$$\Rightarrow a^{-3} = ab^{-3}$$

Donc $(ab^2)^4 = abab^{-2}$

Or $(ab)^2 = 1 \Rightarrow aba = b^{-1}$

d'où $(ab^2)^4 = b^{-3} = 1$

Et :

$$(b^2ab^2)^2 = b^2ab^2b^2ab^2$$
$$= b^2abab^2$$
$$= b^2b^{-1}b^2$$
$$= b^3 = 1$$

8)

On a : $a^4 = (b^2ab^2)^2 = (ab^2ab^2))^2$

$= (ab^2)^4 = 1$

Donc il existe un morphisme surjectif de groupes

$$\begin{aligned} \theta : D_4 &\to H_1 \\ r &\mapsto a \\ s &\mapsto b^2ab^2 \end{aligned}$$

9) Pour montrer que $G_1/H_1 = H_1 \cup bH_1 \cup b^2H_1$,

il suffit de montrer que

$H_1 \cup bH_1 \cup b^2H_1$ est stable par multiplication

à gauche par a et b.

Or : $aH_1 = H_1$ (car $a \in H_1$)

$abH_1 = abaH_1 = b^{-1}H_1 = b^2H_1$

$ab^2H_1 = ab^2b^2ab^2H_1 = abab^2H_1$

$= bH_1$

et $b^3H_1 = H_1$

10) On a $|G_1| \leq |H_1| \cdot |G_1/H_1|$

$\leq |D_4| \cdot 3$

≤ 24

Donc le morphisme surjectif $G_1 \to \sigma_4$

est un isomorphisme

11)

Il existe un morphisme surjectif de groupes

$$f : \mathcal{L}_2(x,y) \longrightarrow \mathbb{H}_8$$
$$x \longmapsto I$$
$$y \longmapsto J$$

Or $I^2 = J^2 = (\underbrace{IJ}_{K})^2 (= -1)$

donc on a un morphisme surjectif

$$\bar{f} : G_2 := \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle \to \mathbb{H}_8$$
$$x \longmapsto I$$
$$y \longmapsto J$$

Soit H_2 le sous-groupe de G_2 engendré par x^2.

L'élément x^2 est central car $x^2 = y^2$ commute à x et y donc $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_2$.

Le groupe G_2/H_2 est engendré par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ avec les relations : $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = 1 = (\bar{x}\bar{y})^2$

donc $G_2/H_2 = \{1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}\bar{y}\}$ est d'ordre ≤ 4.

Pour montrer que $\bar{f} : G_2 \to \mathbb{H}_8$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $|G_2| \leq 8$.

Il suffit donc de montrer que $|H_2| \leq 2$.

Or dans G_2 on a :

$$xyx = y \Rightarrow (yx)^2 = y^2 = (xy)^2$$

donc $\quad x^4 = xy\,xy\,xy\,xy$

$$= x\,\underbrace{yx\,yx}\,yxy$$

$$= x\,(xy\,xy)\,yxy$$

$$= x^2\,yx\,\underline{y^2}\,xy$$

$$= x^2 y^3 \underline{x^2} y \qquad \text{car } y^2 \text{ est central}$$

$$= x^4 y^4 \qquad \text{car } x^2 \text{ est central}$$

d'où $y^4 = 1$. Donc $(x^2)^2 = 1$

et $|H_2| \leq 2$

On a bien $|G_2| \leq 8$ et $G_2 \simeq H_8$.

12) $E = \{\pm I, \pm J, \pm K\}$

remarque: $I^3 = -I$, $J^3 = -J$, $K^3 = -K$ et $IJ = K$

13) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(H_8)$

-1 est d'ordre 2 donc $\phi(-1)$ aussi.

La seule possibilité est donc : $\phi(-1) = -1$

Si $\phi(I) = I$, alors $\phi(J)$ qui est d'ordre 4 est dans E. On a $\phi(-I) = -I$ donc

$$\phi(J) \in \{\pm J, \pm K\}$$

Or I, J engendrent H_8. donc ϕ est déterminé par $\phi(I), \phi(J)$

Donc $\quad |\mathrm{Stab}(I)| \leq 4$.

Or l'orbite de I est de cardinal $\leq |E| = 6$

Donc $\quad |\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)| \leq |\mathrm{Stab}(I)| \times 6 \leq 24$

14) On a un isomorphisme

$$\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle = G_2 \longrightarrow \mathbb{H}_8$$
$$x \longmapsto I$$
$$y \longmapsto J$$

De plus, $\quad -I = I^3, \quad -J = J^3, \quad K = IJ$

Il suffit donc de vérifier qu'il existe des automorphismes

$$\tilde{\phi}_1 : G_2 \xrightarrow{\cong} G_2 \qquad\qquad \tilde{\phi}_2 : G_2 \longrightarrow G_2$$
$$x \longmapsto y^3 \qquad\qquad\qquad x \longmapsto y^3$$
$$y \longmapsto x \qquad\qquad\qquad y \longmapsto xy$$

Pour $\tilde{\phi}_1$: on a : $\quad (y^3)^2 = y^6 = y^2 \quad$ (car on a vu que $y^4 = 1$)

$$x^2 = y^2$$
$$(y^3x)^2 = yx^3y^3x = yx^3x^2yx = (yx)^2 = y^2$$

Donc il existe $\tilde{\phi}_1 : G_2 \to G_2$ un morphisme
$$x \mapsto y^3$$
$$y \mapsto x$$

Or $\langle y^3, x \rangle = G_2 \quad$ (par exemple : $y = x^2 y^3$)

Donc $\tilde{\phi}_1$ est surjectif donc bijectif.

De même pour $\tilde{\phi}_2$ on vérifie que : $(y^3)^2 = (xy)^2 = (y^3xy)^2$
et $\langle y^3, xy \rangle = G_2$ (car $x = (xy)y^3$).

15) On a

$$\phi_1^2 : \begin{array}{l} I \mapsto -I \\ J \mapsto -J \end{array} \quad \text{donc } \phi_1^2 = -Id$$

et $\phi_1^4 = Id$

donc ϕ_1 est d'ordre 4.

On a $\phi_2 \neq Id$

$$\phi_2^3(I) = \phi_2^2(-J) = \phi_2(-K) = \phi_2(-IJ) = JK = I$$

$$\phi_2^3(J) = \phi_2^2(K) = \phi_2^2(IJ) = \phi_2(-JK) = -\phi_2(I) = J$$

donc $\phi_2^3 = Id$ et ϕ_2 est d'ordre 3.

$$\phi_1\phi_2 : \begin{array}{l} I \mapsto -I \\ J \mapsto K \end{array}$$

donc $(\phi_1\phi_2)^2(I) = I$ et $(\phi_1\phi_2)^2(J) = \phi_1\phi_2(K) = \phi_1\phi_2(IJ) = -IK = J$

$\phi_1\phi_2$ est bien d'ordre 2

Il existe donc un morphisme

$$\begin{array}{rcl} G_1 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}_8 \\ a & \longmapsto & \phi_1 \\ b & \longmapsto & \phi_2 \end{array}$$

Or $\sigma_4 \simeq G_1$

16) Comme $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Im}\,\psi$,

$12 = 4\times 3$ divise $|\mathrm{Im}\,\psi|$

Or $\mathrm{Im}\,\psi \leq |\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)| \leq 24$

donc $|\mathrm{Im}\,\psi| = 12$ ou 24.

Si $|\mathrm{Im}\,\psi| = 12$ alors $|\mathrm{Ker}\,\psi| = \dfrac{|\mathfrak{S}_4|}{|\mathrm{Im}\,\psi|} = 2$

Donc $\mathrm{Ker}\,\psi$ serait un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre 2.

On aurait alors $\mathrm{Ker}\,\psi = \langle \sigma \rangle$

pour σ une double transposition ou une transposition.

Comme toutes les doubles transpositions (respectivement toutes les transpositions) sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_4$, $\mathrm{Ker}\,\psi$ contiendrait toutes les doubles transpositions (respectivement toutes les transpositions) ce qui est impossible pour un groupe d'ordre 2.

Forcément : $\mathrm{Ker}\,\psi = 1$, $|\mathrm{Im}\,\psi| = 24$

Donc $|\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_8)| = 24$ et ψ est un isomorphisme.

17) on a $|G| = 8 \times 6 = 48$

18) $$(I,\tau)^2 = (I\Phi(\tau)(I), \tau^2)$$
$$= (IK, 1)$$
$$= (-J, 1)$$

donc $$(I,\tau)^4 = ((-J)^2, 1)$$
$$= (-1, 1)$$

$$(J,\sigma)^3 = (J\Phi(\sigma)(J), \sigma^2)(J,\sigma)$$
$$= (JK, \sigma^2)(J,\sigma)$$
$$= (I, \sigma^2)(J,\sigma)$$
$$= (I\,\Phi(\sigma^2)(J), \sigma^3)$$
$$= (I\,\Phi(\sigma)^2(J), 1)$$
$$= (I^2, 1)$$
$$= (-1, 1)$$

$$(I,\tau)(J,\sigma) = (I\,\Phi(\tau)(J), \tau\sigma)$$
$$= (I\,\Phi(\tau)(KI), \tau\sigma) = (I^2K, \tau\sigma) = (-K, \tau\sigma)$$

Or $\tau\sigma = (23)$ $\quad \Phi(\tau\sigma)(-K) = \Phi(\tau)(-I) = -K$ $\quad$ donc $(I,\tau)(J,\sigma)^2 = (-1, 1)$

19) On a : $(I,\tau)^4 \neq 1 \quad (=(1,1))$

$$\text{et } (I,\tau)^8 = (-1,1)^2 = 1$$

Donc (I,τ) est d'ordre 8 dans G.

Donc $(I,\tau)^4$ est d'ordre 2.

et $G/\langle (I,\tau)^4 \rangle$ est d'ordre 24.

Or dans $G/\langle (I,\tau)^4 \rangle$

On a : $\overline{(I,\tau)}^4 = \overline{(J,\sigma)}^3 = \left(\overline{(I,\tau)(J,\sigma)}\right)^2 = 1$

De plus, $\overline{(I,\tau)}$ est d'ordre 4 et $\overline{(J,\sigma)}$ d'ordre 3

Il existe donc un morphisme :

$$\begin{aligned} \lambda : G_1 & \longrightarrow G/\langle (I,\tau)^4 \rangle \\ a & \longmapsto \overline{(I,\tau)} \\ b & \longmapsto \overline{(J,\sigma)} \end{aligned}$$

C'est un isomorphisme. En effet, l'image est d'ordre un multiple de 12 qui divise 24.

$\left(= |G/\langle (I,\tau)^4 \rangle| \right)$.

Comme $G_1 \simeq \mathfrak{S}_4$ n'a pas de sous groupe distingué d'ordre 2, forcément $|\mathrm{Ker}\,\lambda| = 1$ et $|\mathrm{Im}\,\lambda| = 24$

On a donc un morphisme surjectif $G \longrightarrow G/\langle (I,\tau)^4 \rangle \underset{12}{\simeq}$ $G_1 \simeq \mathfrak{S}_4$.