I

Exercice 1 *a) Donner un groupe non fini mais d'exposant fini.*

b) Montrer que $x \mapsto -x$ *et* $x \mapsto 1-x$ *sont des éléments d'ordre* 2 *dans le groupe des bijections de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$*. Montrer que le groupe engendré par ces deux éléments est le groupe des bijections affines de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$*.*

c) Déterminer l'ordre des matrices

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *et montrer que* A *et* B *engendrent* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*.*

Exercice 2 *Soient* n *un entier tel que* $n > 1$ *et* D_n *le sous-groupe de* $GL_2(\mathbb{R})$ *engendré par*

$$A := \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \qquad et \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe D_n *est appelé groupe diédral d'ordre* $2n$*.*

a) Calculer l'ordre de D_n*.*

b) En déduire que le sous-groupe engendré par A *est un sous-groupe distingué.*

c) Décrire les classes de conjugaisons.

d) Montrer que D_n *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *engendré par :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\zeta := e^{2i\pi/n}$*.*

e) Déterminer l'ordre du sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *engendré par :*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\zeta := e^{2i\pi/n}$*.*

Exercice 3 *Soit* $\mathbb{H}_8$ *le sous-groupe de* $GL_2(\mathbb{C})$ *engendré par les matrices*

$$I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad K := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

a) Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$*.*

b) Donner tous ses sous-groupes, ses sous-groupes distingués, son centre, et ses quotients.

c) En déduire que tous les sous-groupes propres sont distingués et cycliques.

Exercice 4 *Soit n un entier strictement positif et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $I := \{1, 2, \cdots, n\}$. Pour $a_1, \cdots, a_k \in I$, on note $(a_1, \cdots, a_k)$ la permutation (appelée un cycle de longeur k) envoyant $a - 1$ sur $a_2, \cdots, a_{k-1}$ sur a_k, a_k sur a_1 et fixant $j \in I \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$. L'ensemble $\{a_1, \cdots, a_k\}$ est appelé le support du cycle. Rappelons que*

a) *deux cycles de supports disjoints commutent et que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit d'une manière unique (à l'ordre près) comme le produit de cycles de supports disjoints et que*

b) $\sigma(a_1, \cdots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_k))$ *pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Alors, voici quelques exercices :

a) *Calculer* $(1, 2)(2, 3) \cdots (k - 1, k)$.

b) *Montrer que les transpositions (i.e., 2-cycles) engendrent $\mathfrak{S}_n$. En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $(1, 2), (2, 3), \cdots, (n - 1, n)$.*

c) *A quelles conditions deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont-ils conjugués ? En déduire que le nombre des classes de conjugaisons est égal au nombre des partitions de n.*

Exercice 5 *Soit n un entier tel que $n \geq 3$.*

a) *Calculer $(1, 2, 3)(2, 3, 4)$. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.*

b) *Calculer $(1, 2)(2, 3)(1, 2)(2, 3)$. En déduire que $[\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n] = \mathfrak{A}_n$.*

c) *Trouver tous les morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.*
Indication : Montrer que le noyau d'un tel morphisme contient $\mathfrak{A}_n$.

d) *Déterminer $[\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_4]$.*

e) *Déterminer les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$ et en déduire que $\mathfrak{A}_5$ est simple. Montrer que $[\mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}_5] = \mathfrak{A}_5$.*

Exercice 6 Formule de Burnside

Soit X un ensemble fini où agit un groupe G. Montrer que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = N$$

où X^g est l'ensemble des points fixes de g et N le nombre d'orbites de G.

Exercice 7 *[Nombre de coloriages d'un solide platonicien à isométrie près]*

Soit X un solide platonicien. On veut colorier ses faces avec n couleurs fixées (les couleurs ne sont pas forcément toutes représentées et elles peuvent être représentées plusieurs fois). On dit que deux solides du même type ont même modèle de coloriage si on peut passer de l'un à l'autre par une rotation de l'espace. On veut compter le nombre de modèles différents de coloriage que l'on peut créer.

1. *A titre d'exemple, montrer à la main que l'on peut colorier un tétraèdre avec deux couleurs de cinq modèles différents.*
2. *Soit Y l'ensemble de couleurs de cardinal n.*
   - *(a)* *Soit Φ l'ensemble des faces de X. Montrer que colorier X avec les couleurs de Y revient à se donner une fonction de Φ dans Y. On identifie alors l'ensemble des coloriages avec l'ensemble $\mathcal{F}(\Phi, Y)$ des fonctions de Φ dans Y.*

(b) *Observer que deux coloriages f et f' de $\mathcal{F}(\Phi, Y)$ ont même modèle si et seulement si il existe g de $\mathrm{Is}^+(X)$ tel que $g.f = f'$, où l'action de $\mathrm{Is}^+(X)$ sur $\mathcal{F}(\Phi, Y)$ est celle de la remarque.*

(c) *En déduire que le nombre de modèles cherché est égal à $|\mathcal{F}(\Phi, Y)/\mathrm{Is}^+(X)|$.*

3. *En utilisant la formule de Burnside, et l'exercice 8, montrer que*

$$|\mathcal{F}(\Phi, Y)/\mathrm{Is}^+(X)| = \frac{1}{|\mathrm{Is}^+(X)|} \sum_{g \in \mathrm{Is}^+(X)} n^{|\Phi/\langle g\rangle|}$$

4. *Retrouver les cinq modèles de coloriage du tétraèdre à deux couleurs fixées.*
   Le calcul donne $\frac{1}{12}(2^4 + 8.2^2 + 3.2^2)$, où dans la somme, on retrouve l'élément neutre, les huit 3-cycles et les trois produits de 2-cycle de K_4.
5. *Combien de modèles pour le coloriage d'un cube avec trois couleurs ?*
   Le calcul donne $\frac{1}{24}(3^6 + 8.3^2 + 6.3^3 + 3.3^4 + 6.3^3) = 57$, où dans la somme, on retrouve l'élément neutre, les huit 3-cycle, les six transpositions, les trois produits de deux cycle et enfin les six quatre-cycle de $\mathfrak{S}_4$.

Remarque : Soit $a : G \times X \to X$ une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X. Pour tout ensemble Y, on hérite d'une action sur l'ensemble des applications de X dans Y ainsi : pour g élément du groupe, f application de X dans Y, on définit $g \cdot f$ par :

$$\forall x \in X, \quad g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

La présence de l'inverse est nécessaire pour avoir une action à gauche et non à droite.

Exercice 8 *On suppose que le groupe G agit sur l'ensemble X et donc sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X, Y)$ comme ci-dessus. On note*

$$\mathcal{F}(X, Y)^G := \{f,\ f \in \mathcal{F}(X, Y),\ g.f = f, \forall g \in G\},$$

l'ensemble des fonctions G-invariantes de X dans Y.

1. *Montrer que si f vérifie $g.f = f$ pour un g de G, alors $h.f = f$ pour tout h dans le sous-groupe $\langle g\rangle$ engendré par g.*
2. *En déduire que si f vérifie $g.f = f$, alors elle définit par passage au quotient une fonction $\overline{f}$ de $X/\langle g\rangle$ vers Y telle que $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, où $\overline{x}$ désigne l'orbite de x. En déduire que l'ensemble des fonctions de X vers Y invariantes par g est en bijection avec $\mathcal{F}(X/\langle g\rangle, Y)$.*
   On considérera l'application qui envoie f sur $\overline{f}$.
   Cet exercice trouvera une application haute en couleur au moment de l'étude des solides platoniciens, voir l'exercice 7

Exercice 9 *Soit k un corps.*

a) *Montrer que les matrices $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(k)$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $\lambda \in k$ engendrent $\mathrm{SL}_n(k)$. En déduire que pour tout nombre premier p, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjectif.*

b) *Montrer que* $(\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k) = (\mathrm{SL}_n(k), \mathrm{SL}_n(k))$ *(indication : calculer* $T_{i,k}(c)T_{k,j}(c)T_{i,k}(-c)T_{k,j}(-1)$*).*

Exercice 10 *a)* *Exprimer* $\sum_i X_i^2$ *et* $\sum_i X_i^3$ *en fonction des polynômes symétriques élémentaires.*

b) *Soit* $P = X^3 + pX + q$ *un polynôme. On suppose que* $P = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$*. Exprimer* $D := (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_3)^2$ *en fonction de* p, q *(indication : montrer que* D *est de la forme* $\lambda p^3 + \mu q^2$ *puis considérer les polynômes* $X^3 - X$ *et* $X^3 - 1$*).*

c) *On pose :*

$$\Delta = \prod_{1 \leq i,j \leq n} (X_i - X_j) \ .$$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ *un polynôme antisymétrique* i.e. *:*

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ P^\sigma = \epsilon(\sigma)P \ .$$

Montrer que pour l'ordre lexicographique $X_1 > ... > X_n$*, le monôme dominant de* P *est de la forme* X^λ *avec* $\lambda_1 > ... > \lambda_n$*. En déduire que* Δ *divise* P *dans* $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$*.*

Montrer que

$$\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{A}_n} = \mathbb{Q}[s_1, ..., s_n] + \Delta\mathbb{Q}[s_1, ..., s_n]$$

où les s_i *sont les polynômes symétriques élémentaires.*