II

Exercice 1 *a) Montrer que tout sous-groupe de* $(\mathbb{Z},+)$ *est de la forme* $n\mathbb{Z}$ *avec un entier strictement positif. En déduire l'identité de Bézout.*

b) Montrer que $(\mathbb{Q}^\times,\times)$ *n'est pas de type fini.*

c) On considère le groupe $G=(\mathbb{R},+)$

- *i) Montrer que les sous-groupes de* G *sont soit monogènes soit dense.*
- *ii) Donner un exemple d'un sous-groupe de* G *dense et de type fini.*
- *iii) Tous les sous-groupes de* G *sont-ils de type fini ?*

d) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Q}^\times$.

Exercice 2 *a) Montrer que tout groupe fini est un sous-groupe d'un certain* $\mathfrak{A}_n$.

b) Existe-t-il un morphisme injectif $\mathfrak{S}_3\to\mathfrak{A}_4$ *?*

c) En faisant agir $\mathfrak{S}_4$ *sur ses doubles transpositions, montrer qu'il existe un morphisme surjectif* $\phi:\mathfrak{S}_4\to\mathfrak{S}_3$. *Déterminer son noyau. Existe-t-il une section de* ϕ i.e. *un morphisme* $\psi:\mathfrak{S}_3\to\mathfrak{S}_4$ *tel que* $\phi\psi=\mathrm{Id}$ *?*

Exercice 3 *Si* $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, *on note* $k(\sigma)$ *le nombre d'orbites de* $\langle\sigma\rangle$ *dans* $\{1,...,n\}$. *En particulier,* σ *est un produit de* $k(\sigma)$ *cycles à supports disjoints.*

1. *Montrer que pour toute transposition* τ, $k(\sigma\tau)=k(\sigma)\pm1$ *(indication : si* $\tau=(ij)$ *distinguer les cas suivant que* i,j *apparaissent dans un même cycle ou dans* 2 *cycles différents de* σ*). En déduire que le* $n-$*cycle* $(12\cdots n)$ *peut s'écrire comme un produit de* $n-1$ *transpositions mais pas moins.*
2. *Montrer que si* $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $n-k(\sigma)$ *est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour écrire* σ.

Exercice 4 *a) Soit* G *un groupe fini qui agit transitivement sur un ensemble* X *de cardinal au moins* 2. *Montrer qu'il existe un élément* $g\in G$ *qui n'a pas de point fixe (indication : utiliser la formule de Burnside).*
Donner un contre-exemple si G *est infini.*

b) Endéduire que si G *est un groupe fini et* H *un sous-groupe propre de* G, *alors* $G\neq\cup_{g\in G}gHg^{-1}$ *(indication : considérer l'action de* G *sur* G/H *par multiplication à gauche). Donner un contre-exemple si* G *est infini.*

Exercice 5 *Soit* G *un groupe simple d'ordre* 60.

a) Montrer à l'aide des théorèmes de Sylow que G *a* 6 *sous-groupes d'ordre* 5.

b) En déduire un morphisme injectif $G\to\mathfrak{S}_6$.

c) Endéduire un morphisme injectif $G\to\mathfrak{A}_6$.

d) En faisant agir G *sur les classes à droite* $\mathfrak{A}_6/G$, *en déduire un morphisme injectif* $G\to\mathfrak{A}_5$.

e) Montrer que $G\simeq\mathfrak{A}_5$

Exercice 6 *a) Montrer que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Déterminer (à isomorphisme près tous les produits semidirects de* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *avec* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b) *Montrer que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ *(indication : choisir une bonne action sur l'ensemble des éléments d'ordre* 2 *de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*). Déterminer tous les produits semidirects de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *avec* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *(vérifier qu'il y a* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*,* D_6 *le groupe diédral d'ordre* 12 *et* $\mathfrak{A}_4$*).*

Exercice 7 *Soit* $z := e^{i\pi/4}$*. On pose :*

$$s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ g_3 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^3 \end{pmatrix},\ g_5 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^5 \end{pmatrix},\ g_7 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^7 \end{pmatrix}.$$

a) *Montrer que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*

b) *Quel est l'ordre des matrices* s, g_3, g_5, g_7 *dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *?*

c) *On pose* $G_i := \langle g_i, s\rangle$ *pour* $i = 3, 5, 7$*. Exprimer* sg_is *comme une puissance de* g_i *pour* $i = 3, 5, 7$*.*

d) *Montrer que* $\langle g_i\rangle$ *est un sous-groupe distingué d'indice* 2 *dans* G_i *pour* $i = 3, 5, 7$*.*

e) *Montrer que* $G_3 = \left\{g_3^k : k \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{g_3^k s : k \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right\}$ *et trouver les éléments d'ordre* 2 *de* G_3*.*

f) *Trouver un morphisme de groupes :*

$$\phi_3 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

tel que $G_3 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_3} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*.*

g) *Quels sont les éléments d'ordre* 2 *de* G_3 *?*

h) *Déterminer de même des morphismes de groupes :*

$$\phi_5, \phi_7 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

tels que $G_5 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_5} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *et* $G_7 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*. Déterminer aussi les éléments d'ordre* 2 *de* G_5 *et* G_7*.*

i) *Montrer que les groupes* G_3, G_5, G_7 *sont deux à deux non isomorphes.*

Exercice 8 *Soit* p *un nombre premier et* G *un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{F}_p)$ *qui est un* p*-groupe. On fait agir* G *sur* $\mathbb{F}_p^n$ *via* $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$*.*

a) *En décomposant* $\mathbb{F}_p^n$ *en* G*-orbites, montrer qu'il existe* $x \in \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ *dont le stabilisateur est* G*.*

b) *Montrer par récurrence qu'il existe une base* $\{x_1, \cdots, x_n\}$ *de* $\mathbb{F}_p^n$ *telle que* $G.x_1 = x_1$ *et* $G.x_i \in x_i + \mathbb{F}_p x_1 + \cdots + \mathbb{F}_p x_{i-1}$ *pour* $1 < i \leq n$*.*

c) *En déduire que* G *est à conjugaison près un sous-groupe du groupe formé des matrices de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 9 *Soit T un tétraèdre régulier et G_T le groupe des isométries de T.*

a) *Montrer que G_T est isomophe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$.*

b) *Montrer que pour tous $1 \leq i \neq j \leq 4$, G_T contient un isométrie qui correspond à la transposition (i, j). Indication : Considérer un plan médiateur passant par deux sommets.*

c) *En déduire que G_T est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Exercice 10 *Soient C une cube et T, T' deux tétraèdres réguliers inscrits dans C. On note G_C, G_T le groupe des isométries de C et T, respectivement.*

a) *Montrer que pour tout $g \in G_T$, il existe un unique $\sigma \in G_C$ tel que $g = \sigma|_T$. En déduire qu'il existe un morphisme injectif $\iota :\ G_T \hookrightarrow G_C$.*

b) *En considérant l'action de G_C sur $\{T, T'\}$, montrer que $\iota(G_T)$ est un sous-groupe de G_C d'indice 2.*

c) *En déduire la suite exacte courte suivante :*

$$1 \longrightarrow G_T \xrightarrow{\iota} G_C \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Exercice 11 *Soit $n \geq 3$. Montrer que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A-t-on : $\mathfrak{S}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathfrak{A}_n$?*

Exercice 12 *Montrer que le sous-groupe $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ du groupe des quaternions inversibles n'est pas un produit semidirect de deux de ses sous-groupes propres ?*

Exercice 13 *Soient G un groupe et S un ensemble de générateurs de ce groupe. Le graphe de Cayley associé est le graphe dont les sommets sont les éléments de G et dont les flèches $x_i \to x_j$ relient deux éléments $x_i, x_j \in G$ s'il existe $s \in S$ tel que $x_j = x_i s$. Vérifier que le graphe de Cayley de $\mathfrak{A}_4$ avec les générateurs $c = (123)$ et $s = (12)(34)$ est de la forme :*