**Corrections pour la fiche II**

**Exercice 2**

a) Dans $\mathfrak{A}_4$, tout $3-$cycle est conjugué à $(123)$ ou à $(123)^{-1}$. En effet : soit $c \in \mathfrak{A}_4$ un $3-$cycle. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ tel que $\sigma c \sigma^{-1} = (123)$. Si $\tau = (12)$, alors :

$$(\tau\sigma)c(\tau\sigma)^{-1} = \tau(123)\tau = (123)^{-1} \ .$$

Par exemple, $(132)$ n'est pas conjugué à $(123)$ dans $\mathfrak{A}_4$.

En particulier, si $H \lhd \mathfrak{A}_4$, alors si $H$ contient un $3-$cycle, il les contient tous et $H = \mathfrak{A}_4$. Si $H$ ne contient aucun $3-$cycle, on a :

$$H \subseteq V := \{(1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

et donc $H = \{1\}$ ou $H = V$.

Les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_4$ sont donc :

$$\{1\}, V, \mathfrak{A}_4 \ .$$

En particulier, $\mathfrak{A}_4$ ne contient pas de sous-groupe d'ordre 6 (un sous-groupe d'ordre 6 dans un groupe d'ordre 12 est d'indice 2 donc distingué).

c) On note $V$ le sous-groupe $\{(1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_3 := \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \ : \ \sigma(4) = 4\}$.

On a $V \cap \mathfrak{S}_3 = \{1\}$, $V \lhd \mathfrak{S}_4$, donc :

$$V.\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4$$

(en effet $|V.\mathfrak{S}_3| = 6 \times 4 = |\mathfrak{S}_4|$).

On a donc $\mathfrak{S}_4 \simeq (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathfrak{S}_3$.

Soit $\phi : S_4 \to \mathfrak{S}_3$ un morphisme surjectif. Le sous-groupe $N$ est distingué et d'ordre $|S_4|/|S_3| = 4$. On en déduit facilement que $\ker\phi = V$. Comme $V \cap \mathfrak{S}_3 = \{1\}$, la restriction :

$$\phi|_{\mathfrak{S}_3} \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3$$

est injective ( car son noyau est $\mathfrak{S}_3 \cap \ker\phi = \{1\}$) donc un isomorphisme. Notons $S : \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3$ sa réciproque. On a : $\phi S = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}_3}$ *i.e.* $S$ est une section de $\phi$.

**Exercice 12**

On note :

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

On note $Q_8$ le sous-groupe $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

On a les relations suivantes :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \ IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, \ KI = -IK = J \ .$$

Tous les sous-groupes de $Q_8$ sont distingués.

Les sous-groupes d'ordre 4 sont : $\langle I \rangle$, $\langle J \rangle$ et $\langle K \rangle$. Le seul sous-groupe d'ordre 2 est $\{\pm 1\}$.

En particulier, si $N, H$ sont des sous-groupes de $Q_8$ d'ordres 4 et 2, alors $N \cap H = \{\pm 1\} \neq \{1\}$. Donc $Q_8$ n'est pas un produit semidirect de deux de ses sous-groupes propres (*i.e.* inclus strictement dans $Q_8$).

**Exercice 13**

Soient $c := (123)$, $s := (12)(34) \in \mathfrak{A}_4$. Voici le graphe colorié de $\mathfrak{A}_4$ avec pour tout $x \in \mathfrak{A}_4 : x \Rightarrow xs$ et $x \to xc$ :