III

Exercice 1 () *Soient N, H deux groupes et soit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto \phi_h$, un morphisme de groupes. Montrer qque pour tout $(h, n) \in H \times N$, on a l'égalité suivante dans $N \rtimes_\phi H$:*

$$(1, h)(n, 1)(1, h)^{-1} = (\phi_h(n), 1) \ .$$

Exercice 2 (Critères d'isomorphismes entre produits semidirects) *Soient H, N deux groupes. Soient $\phi_1, \phi_2 : H \to \mathrm{Aut}N$ deux morphismes de groupes.*

a) *On suppose qu'il existe $\gamma \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\phi_2 = \phi_1 \circ \gamma$. Montrer que $N \rtimes_{\phi_1} H \simeq N \rtimes_{\phi_2} H$.*

b) *On suppose qu'il existe $\gamma \in \mathrm{Aut}N$ tel que pour tout $h \in H$:*

$$\phi_{2,h} = \gamma^{-1}\phi_{1,h}\gamma \ .$$

Montrer que $N \rtimes_{\phi_1} H \simeq N \rtimes_{\phi_2} H$.

c) *En déduire que les groupes non abéliens de la forme :*

$$(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathbb{Z}/3$$

sont tous isomorphes. De même pour les groupes de la forme :

$$\mathbb{Z}/3 \rtimes (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \ .$$

d) *Soient p, q deux nombres premiers > 0. On suppose que $p|q - 1$. Montrer que les groupes non abéliens de la forme :*

$$\mathbb{Z}/q \rtimes \mathbb{Z}/p$$

sont isomorphes.

Exercice 3 *a)* *Soit G un groupe de centre Z. Montrer que si G/Z est cyclique, alors G est abélien. En déduire que les groupes d'ordre p^2, où p est premier, sont abéliens.*

b) *Si $p \geqslant 3$ est premier, montrer que $(\mathbb{Z}/p^n)^\times$ est cyclique (en revanche, $\mathbb{Z}/2^n$ n'est pas cyclique si $n \geqslant 3$).*

c) *Montrer qu'il existe (à isomorphisme près) un seul sous-groupe non abélien de la forme :*

$$\mathbb{Z}/49\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ .$$

d) *Déterminer l'ordre de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7)$. Montrer que les $3-$Sylow de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ (indication : considérer les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$).*

e) *En déduire que si $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7)$ est d'ordre 3 alors A est conjugué à une des matrices :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{\pm 1}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\pm 1}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$$

f) *Montrer que si G est un groupe d'ordre 147, alors G contient un unique 7−Sylow.*

g) *Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 147 (il y a deux abéliens, un $\mathbb{Z}/49 \rtimes \mathbb{Z}/3$ et trois $(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7) \rtimes \mathbb{Z}/3$).*

Exercice 4 *Si p est un nombre premier, on note $U_{3,p}$ le groupe des matrices de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x, y, z \in \mathbb{F}_p$.

a) *Montrer que $U_{3,2} \simeq \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$ (le groupe diédral d'ordre 8) ;*

b) *montrer que si $p \geqslant 3$, $U_{3,p} \simeq (\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \rtimes \mathbb{Z}/p$.*

Exercice 5 *Soit $p \geqslant 3$ premier. Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3.*

a) *Montrer que $G/Z \simeq \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ et que $Z = (G, G)$.*

b) *On suppose que g, h commutent avec $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Montrer que pour tous m, n entiers, $[g^m, h^n] = [g, h]^{mn}$.*

c) *Montrer que pour tout n entier, $g^n h^n = (gh)^n [g, h]^{\binom{n}{2}}$.*

d) *En déduire que $g \mapsto g^p$ est un morphisme de groupes.*

e) *Montrer que si tous les éléments de G sont d'ordre p, montrer que $G \simeq U_{3,p}$ (indication : vérifier que G admet un sous-groupe d'indice p et que sous-groupe est distingué).*

f) *Montrer que si G admet un élément x d'ordre p^2, alors il existe $y \in G \setminus \langle x \rangle$ d'ordre p (indication : soit $y \notin \langle x \rangle$; comme $Z = \langle x \rangle$, $y^p = x^{pr}$ pour un certain r, alors yx^{-r} est d'ordre p). En déduire que G est un produit semidirect $\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p$.*

g) *Montrer que tous les produits semidirects non abéliens $\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p$ sont isomorphes au groupe :*

$$G_p := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \, a, b \in \mathbb{Z}/p^2, \, a = 1 \bmod p \right\} \, .$$