IV

Exercice 1 *Soit $n \geqslant 5$. On rappelle que le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple.*

a) *Soit G un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $G = \{1\}, \mathfrak{A}_n$, ou $\mathfrak{S}_n$.*

b) *Soit G un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$. En considérant une action de G sur $\mathfrak{S}_n/G$, montrer que $G \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.*

Exercice 2 *Déterminer le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Donner un $p-$Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ et en déduire que tous les produits semidirects*

$$\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p$$

non directs sont isomorphes.

Exercice 3 *Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre* 12.

Exercice 4 a) *Soit G un groupe d'ordre 12 non abélien. Montrer que G est un produit semi-direct et qu'il y a 3 possibilités (à isomorphisme près) (compter les $2-$Sylow et $3-$Sylow).*

b) *Montrer que $\langle a, b \ : \ a^4 = b^3 = a^{-1}bab = 1 \rangle$ est d'ordre 12 et isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

c) *Montrer que $\langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = (ab)^6 = 1 \rangle$ est d'ordre 12 et isomorphe au groupe diédral d'ordre 12.*

d) *Vérifier que le groupe $\mathfrak{A}_4$ est la troisième possibilité.*

Exercice 5 *Montrer que $\mathfrak{S}_5$ possède un sous-groupe d'ordre 20.*

Exercice 6 *Soit G un groupe d'ordre 20 et n_2 le nombre de 2-Sylow sous-groupes de G.*

a) *Montrer qu'il existe un seul 5-Sylow sous-groupe S de G et que le nombre n_2 est égal à 1 ou 5.*

b) *Supposons que $n_2 = 1$ et notons le seul 2-Sylow sous-groupe de G par T.*
   i) *Montrons que G est isomorphe à $S \times T$.*
   ii) *Déterminer les possibles structures de G.*

c) *Supposons que $n_2 = 5$ et notons un 2-Sylow sous-groupe de G par T. Montrer que $G \cong S \rtimes T$.*

Exercice 7 *Soit p un nombre premier. On pose : $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

a) *Montrer que le sous-groupe U de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ engendré par la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un $p-$Sylow.

b) *Déterminer le normalisateur de U dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ *et en déduire le nombre de* $p-$*Sylow de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

c) *Soit G un groupe fini et P un $p-$Sylow de G. Montrer que* $NN(P) = N(P)$ *et vérifier que c'est bien le cas pours* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 8 *Soit p un nombre premier.*

a) *Calculer le nombre d'éléments de* $\mathfrak{S}_p$ *d'ordre p.*

b) *En déduire le nombre de p-Sylow sous-groupe de* $\mathfrak{S}_p$.

c) *A l'aide du théorème de Sylow, retrouver la formule de Wilson* $(p-1)! = -1 \bmod p$.