V Groupes définis par générateurs et relations

Exercice 1 *Soit G le groupe défini par $\langle x, y \ : \ x^2 = y^3 = 1\rangle$. L'objectif est de montrer que G est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{Z})$.*

a) *Montrer que le groupe* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *est engendré par* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) *Calculer* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *En déduire que $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par*
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) *Notons l'image de* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *par la projection canonique* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *par A et B, respectivement.*

i) *Montrer que $A^2 = B^3 = \mathbf{1}_2$.*

ii) *En déduire qu'il existe un morphisme surjectif φ de G dans $PSL(2,\mathbb{Z})$.*

d) *Posons $\xi = xy$ et $\eta = xy^{-1}$. Montrer que tout élément de G peut s'écrire sous la forme*
$x^{\epsilon}\xi^{m_1}\eta^{n_1}\cdots\xi^{m_r}\eta^{n_r}x^{\epsilon'}$ *oú $\epsilon, \epsilon' \in \{0,1\}$ et $m_i, n_i \in \mathbb{N}$.*

e) *Expliciter $\xi' := \varphi(\xi)$ et $\eta' := \varphi(\eta)$. En déduire que le module de la somme des composantes de $\xi'^{m_1}\eta'^{n_1}\cdots\xi'^{m_r}\eta'^{n_r}$ est au moins 3 sauf si $m_1 = n_1 = \cdots = m_r = n_r = 0$.*

f) *Conclure.*

Exercice 2 *Soit $G = \langle a, b \ : \ aba = bab\rangle$ le groupe de tresse de trois cordes. Posons $x = ab^2$ et $y = ab$.*

a) *Montrer que G est engendré par x et y.*

b) *Montrer que $x^2 = y^3 \in Z(G)$.*

c) *Calculer les commutateurs $[x, y]$ et $[x, y^2]$. En déduire que $Z(G)$ est engendré par $x^2 = y^3$.*

d) *En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{Z})$.*

Exercice 3 *a)* *Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle a \ : \ a^n = 1\rangle$.*

b) *Montrer que D_n le groupe diédral d'ordre $2n$ est isomorphe à :*

$$\langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = (ab)^n 2 = 1\rangle \ .$$

c) *Montrer que $D_\infty \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = 1\rangle$ où D_∞ est le groupe des bijections affines $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lambda x + \mu$.*

Exercice 4 *Montrer que $(\mathbb{Q}, +) \simeq \langle x_n, n \geqslant 1 \ : \ x_n = x_{nk}^k, k, n \geqslant 1\rangle$ (indication : montrer que tout élément non trivial du membre de droite s'écrit sous la forme $x_p^{\pm q}$, $p, q \geqslant 1$ et justifier l'existence d'un morphisme de groupes $x_n \mapsto 1/n$).*

Exercice 5 *Donner une présentation de* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *avec* 2 *générateurs.*

Exercice 6 *a) Montrer :* $\mathfrak{S}_4 \simeq \langle a, b \,:\, a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1 \rangle$.

b) Montrer : $\mathfrak{A}_4 \simeq \langle a, b \,:\, a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle$.

c) Montrer : $\mathfrak{A}_5 \simeq \langle a, b, c \,:\, a^2 = b^3 = c^5 = abc = 1 \rangle$ *(montrer que le sous-groupe engendré par c est d'indice* $\leqslant 12$*).*

Exercice 7 *Soit* Q_8 *le groupe des quaternions d'ordre* 8*. Montrer que* $Q_8 \simeq \langle a, b \,:\, a^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}, a^2 = b^2 \rangle$*. Exprimer le groupe* $\langle a, b \,:\, a^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}, b^4 = 1 \rangle$ *comme un produit semidirect et déterminer son ordre.*

Exercice 8 *Montrer que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle a, b \,:\, a^4 = 1, a^2 = b^3 \rangle$ *(indication : remarquer que* a^2 *est dans le centre).*

Exercice 9 *Soit* $G = \langle x, y \rangle$ *le groupe libre engendré par deux éléments.*

a) Montrer que x^2, y^3 *engendrent un groupe isomorphe à* G*.*

b) Montrer que x^2, y^2, xy *engendrent un groupe isomorphe au groupe libre à* 3 *générateurs.*

Exercice 10 *Montrer que* $\langle a, b \,:\, a^7 = b^3 = bab^{-1}a^{-2} = 1 \rangle$ *est le seul groupe non abélien d'ordre* 21 *(à isomorphisme près).*

Exercice 11 * *Montrer que le groupe* $\langle a, b, c \,:\, a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle$ *est trivial.*

$*$. *Exercice difficile*