

## VI

**Exercice 1** Soit  $G$  un groupe. Soit  $T$  une partie de  $G$ . On note  $N$  le plus petit sous-groupe distingué de  $G$  contenant  $T$ . Montrer que  $N = \langle S \rangle$  où  $S = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$  ;

**Exercice 2** Soit  $G_n$  le groupe

$$\langle s_1, \dots, s_n : \forall i, s_i^2 = 1, \forall i, (s_i s_{i+1})^3 = 1, \forall j \geq i + 2, (s_i s_j)^2 = 1 \rangle .$$

a) On pose  $H := \langle s_2, \dots, s_n \rangle \leq G_n$ . Montrer que

$$G/H = H \cup s_1 H \cup s_2 s_1 H \cup \dots \cup s_n \dots s_1 H .$$

b) Montrer par récurrence sur  $n$  que  $G_n \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$ .

**Exercice 3** Montrer que

$$\mathfrak{S}_n \simeq \langle x_i, 1 \leq i \leq n-1 : \forall i, j, k \neq i, x_i^2 = (x_i x_j)^3 = (x_i x_j x_i x_k)^2 = 1 \rangle$$

(indication : considérer les transpositions  $(1i)$ ).

**Exercice 4** Montrer que :

$$\mathfrak{A}_n \simeq \langle x_i, 1 \leq i \leq n-2 : x_1^3 = 1, \forall i \geq 2, x_i^2 = 1, \forall i, (x_i x_{i+1})^2 = 1, \forall j > i+1, (x_i x_j)^2 = 1 \rangle .$$

**Exercice 5** Montrer que  $\mathbb{H}_8 \simeq \langle x, y : xyx = y, x^2 = y^2 \rangle$ .

**Exercice 6** a) Montrer que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$  contient un sous-groupe  $H$  isomorphe à  $\mathfrak{A}_5$  (indication : utiliser la présentation  $\mathfrak{A}_5 = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1 \rangle$  et considérer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $i^2 = -1$ ).

b) En déduire, en considérant l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$  sur  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)/H$  que :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6 .$$

**Exercice 7** Montrer que les groupes simples  $\mathfrak{A}_8$  et  $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$  ont même cardinal mais ne sont pas isomorphes (indication : en utilisant la forme réduite de Jordan des matrices, montrer que dans  $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$  les éléments d'ordre 2 sont conjugués).

**Exercice 8** Soit  $G$  le groupe de présentation :

$$\langle r, s, t : r^2 = s^3 = t^3 = rst \rangle .$$

a) Montrer que  $rst$  est dans le centre de  $G$  et que  $G/\langle rst \rangle \simeq \mathfrak{A}_4$ .

b) Montrer que  $G$  est d'ordre 24.

c) Montrer que  $G$  ne contient pas de sous-groupe d'ordre 12.