

VI

Exercice 1 Soit G un groupe. Soit T une partie de G . On note N le plus petit sous-groupe distingué de G contenant T . Montrer que $N = \langle S \rangle$ où $S = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$;

Exercice 2 Soit G_n le groupe

$$\langle s_1, \dots, s_n : \forall i, s_i^2 = 1, \forall i, (s_i s_{i+1})^3 = 1, \forall j \geq i + 2, (s_i s_j)^2 = 1 \rangle .$$

a) On pose $H := \langle s_2, \dots, s_n \rangle \leq G_n$. Montrer que

$$G/H = H \cup s_1 H \cup s_2 s_1 H \cup \dots \cup s_n \dots s_1 H .$$

b) Montrer par récurrence sur n que $G_n \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$.

Exercice 3 Montrer que

$$\mathfrak{S}_n \simeq \langle x_i, 1 \leq i \leq n-1 : \forall i, j, k \neq i, x_i^2 = (x_i x_j)^3 = (x_i x_j x_i x_k)^2 = 1 \rangle$$

(indication : considérer les transpositions $(1i)$).

Exercice 4 Montrer que :

$$\mathfrak{A}_n \simeq \langle x_i, 1 \leq i \leq n-2 : x_1^3 = 1, \forall i \geq 2, x_i^2 = 1, \forall i, (x_i x_{i+1})^2 = 1, \forall j > i+1, (x_i x_j)^2 = 1 \rangle .$$

Exercice 5 Montrer que $\mathbb{H}_8 \simeq \langle x, y : xyx = y, x^2 = y^2 \rangle$.

Exercice 6 a) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ contient un sous-groupe H isomorphe à \mathfrak{A}_5 (indication : utiliser la présentation $\mathfrak{A}_5 = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1 \rangle$ et considérer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $i^2 = -1$).

b) En déduire, en considérant l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)/H$ que :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6 .$$

Exercice 7 Montrer que les groupes simples \mathfrak{A}_8 et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ ont même cardinal mais ne sont pas isomorphes (indication : en utilisant la forme réduite de Jordan des matrices, montrer que dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ les éléments d'ordre 2 sont conjugués).

Exercice 8 Soit G le groupe de présentation :

$$\langle r, s, t : r^2 = s^3 = t^3 = rst \rangle .$$

a) Montrer que rst est dans le centre de G et que $G/\langle rst \rangle \simeq \mathfrak{A}_4$.

b) Montrer que G est d'ordre 24.

c) Montrer que G ne contient pas de sous-groupe d'ordre 12.