VIII

Exercice 1 *Montrer que les seules solutions de* $y^2+4 = x^3$ *dans* $\mathbb{Z}$ *sont* $(\pm 11, 5)$ *et* $(\pm 2, 2)$.

Exercice 2 *Calculer le reste de la division euclidienne de* $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ *par* X^2+1.

Exercice 3 *Montrer que dans l'anneau* $\mathbb{K}[T^2, T^3]$, T^5 *et* T^6 *n'ont pas de PGCD. D'ici,* $\mathbb{K}$ *désigne un corps commutatif.*

Exercice 4 *Montrer que l'anneau* $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XZ-Y^2)$ *n'est pas factoriel. (On pourra montrer que cet anneau est isomorphe à* $\mathbb{C}[U^2, UV, V^2] \subset \mathbb{C}[U,V]$.*)*

Exercice 5 ***(Critère de réduction)*** *Soient* A *un anneau factoriel,* K *son corps des fractions,* p *un élément irréductible de* A *et* $\overline{K}$ *le corps des fractions de* $A/(p)$. *Soit* $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ *tel que* p *ne divise pas* a_n *et* $\overline{P} = \sum_{i=0}^n \overline{a}_i X^i$ *est un polynôme irréductible de* $\overline{K}[X]$, *où* $\overline{a}_i$ *est l'image de* a_i *par la projection canonique* $A \to A/(p)$. *Montrer que* P *est irréductible dans* $K[X]$ *(et donc dans* $A[X]$ *si le pgcd de ses coefficients est* 1*). En considérant la réduction modulo* 3, *montrer que* $X^3 - X + 2$ *est irréductible dans* $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 6 ***(Critère d'Eisenstein)*** *Soient* A *un anneau factoriel et* K *son corps des fractions. Soient* q *un élément irréductible de* A *et* $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ *un polynôme de* $A[X]$ *tels que :* q *ne divise pas* a_n, $q|a_i$ *pour* $0 \leqslant i < n$ *et* q^2 *ne divise pas* a_0. *Montrer que* P *est irréductible dans* $K[X]$ *(et donc dans* $A[X]$ *si le pgcd de ses coefficients est* 1*). En déduire que pour tout nombre premier* p, $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ *est irréductible dans* $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 7 *Etudier l'irréductibilité de* $X^2+Y^2+Z^2$ *sur* $\mathbb{K}$.

Exercice 8 *Factoriser* $X^4 - 2$ *sur* $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$.

Exercice 9 *L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas de solution de l'équation suivante dans* $\mathbb{Z}^3$ *:*

$$X^3 + Y^3 = Z^3, \qquad XYZ \neq 0. \tag{1}$$

Par l'absurde, on suppose qu'il en existe une. Suppose que (X,Y,Z) *est une solution de (1) telle que* $|XYZ|$ *soit minimal.*

a) *Montrer que* X, Y *ou* Z *est pair.*
   On supposera dans la suite que Z *est pair.*

b) *Montrer que* X *et* Y *sont premiers entre eux.*

c) *Soient* $U, V \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ *tels que* $X = U+V$ *et* $Y = U-V$. *Montrer que* U *et* V *sont des entiers qui sont premiers entre eux et que* U *et* V *ont de parités différentes.*

d) *On suppose que* 3 *ne divise pas* Z. *Montrer qu'il existe* $S, W \in \mathbb{Z}$ *tels que* $2U = S^3$ *et* $U^2 + 3V^2 = W^3$.

e) *(Fait en cours) En travaillant dans* $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$*, montrer que*

$$2U = (2a+b)(a-b)(a+2b), \qquad 2V = 3ab(a+b),$$

avec les entiers a *et* b *premiers entre eux.*

f) *Montrer que* $a-b, a+2b$ *et* $2a+b$ *sont des cubes. En déduire une plus petite solution de (1).*

g) *Traiter le cas où* $3|Z$.

Exercice 10 *Soit* k *un corps.*

a) *Montrer que si* $f \in k[K]$, $g \in k[Y]$ *sont des polynômes non nuls, alors* $k[X,Y]/(f,g)$ *est de dimension* $\leqslant \deg f \deg g$.

b) *En déduire que si* $f, g \in k[X,Y]$ *sont premiers entre eux, alors* $k[X,Y]/(f,g)$ *est de dimension finie et que tous les idéaux de* $k[X,Y]$ *peuvent être engendrés par un nombre fini d'éléments.*

c) *Montrer que l'idéal* $(X,Y)^n$ *peut être engendré par* $n+1$ *éléments mais non moins (indication trouver la dimension de* $(X,Y)^n/(X,Y)^{n+1}$*).*

d) *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de* $\mathbb{C}[X,Y]$*. Montrer que* $\mathfrak{m}$ *n'est pas principal. Montrer que* $\mathfrak{m}$ *contient un vrai polynôme non nul en* X *et un vrai polynôme non nul en* Y*. En déduire que* $\mathfrak{m} = (X-x, Y-y)$ *pour certains* $x, y \in \mathbb{C}$.

e) *Montrer que les idéaux premiers de* $\mathbb{C}[X,Y]$ *sont :*

$$0,\ (f),\ f \textit{ irréductible},\ (X-x, Y-y), x, y \in \mathbb{C}\ .$$

Exercice 11 *Soit* A *un anneau euclidien et* ν *un stathme associé. Soit* $S \subseteq A$ *une partie qui ne contient pas* 0*, qui contient* 1 *et qui est stable par produit.*

Montrer que l'anneau

$$S^{-1}A := \{a/s \ :\ a \in A, s \in S\}$$

est euclidien pour $\nu'(x) := \inf\{\nu(kx)\ :\ k \in S,\ kx \in A\}$.

Exercice 12 *Soit* A *un anneau intègre. On définit par récurrence :* $A_0 := 0$, $A_n := \{x \in A\ :\ A_{n-1} + (x) = A\}$.

a) *Montrer que* A *est euclidien si et seulement si* $\cup_n A_n = A$ *(indication : on pourra considérer la fonction* $\nu(x) := \inf\{n\ :\ x \in A_n\}$*).*

b) *En déduire que si* A *est euclidien, il existe* $x \in A$ *non inversible tel que* $A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$, $a \mapsto a \bmod x$ *est surjective.*

Exercice 13 *Soit* $A := \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$.

a) *Montrer que si* $P \in \mathbb{R}[X,Y]$*, alors* $P = a(X)Y + b(X) \bmod X^2+Y^2+1$ *pour certains* $a, b \in \mathbb{R}[X]$.

b) *Montrer que l'on peut toujours trouver une solution* $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ *au système :*

$$\begin{cases} x^2+y^2+1 = 0 \\ a(x)y + b(x) = 0 \end{cases}$$

et en déduire que $A^\times = \mathbb{R}^\times$.

c) *Montrer que A n'est pas euclidien.*

d) *Montrer que tous les idéaux premiers non nuls de A sont principaux et maximaux (indication : montrer qu'un idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{R}[X,Y]$ qui contient X^2+Y^2+1 est de la forme $\mathfrak{p}=(X^2+Y^2+1, aX+bY+c)$ pour certains $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec a ou b non nul).*

e) *Soit I un idéal non principal tel que $\dim A/I$ soit minimale. Montrer que $I \subsetneq (p)$ pour un certain p premier et que $J := \{x \in A \ :\ xp \in I\}$ est un idéal contenant I strictement (indication : soit $x\in I$ non nul tel que $\dim A/x$ est minimale, montrer que $x/p \in J\setminus I$). En déduire que J est principal engendré par un certain $a\in A$. Trouver une contradiction (indication : $I=(pa)$).*

f) *Conclusion ?*