VI

Exercice.— Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

*

Il suffit de trouver un autoomorphisme non intérieur d'ordre 2.

On pose : $\sigma_1 := (12)(34)(56)$, $\sigma_2 := (23)(45)(16)$, $\sigma_3 := (34)(15)(26)$, $\sigma_4 := (45)(12)(36)$, $\sigma_5 := (16)(34)(25)$, $s_i := (ii+1)$, $1 \leqslant i \leqslant 5$.

Comme $\mathfrak{S}_6$ a pour présentation :

$$\langle s_1, ..., s_5 | \underbrace{\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 5,\ s_i^2 = 1,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4,\ (s_i s_{i+1})^3 = 1,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4, \forall\, i+1 < j \leqslant 5,\ s_i s_j = s_j s_i}_{(*)} \rangle,$$

comme les σ_k vérifient les relations $(*)$, il existe un morphisme de groupes $\varphi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$, $s_i \mapsto \sigma_i$ ($\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 5$).

Ce morphisme a un noyau $K \lhd \mathfrak{S}_6$. L'image de φ est de cardinal $\geqslant 6$. Donc K est d'indice$\geqslant 6$. Comme les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_6$ sont $1, \mathfrak{A}_6$ et $\mathfrak{S}_6$, on a $K = 1$. Donc φ est injective donc surjective.

Le morphisme φ ne préserve pas les transpositions donc n'est pas intérieur.

Déterminons $\varphi \circ \varphi$:

on a $(16) = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1$, $(15) = s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2 s_1$, $(26) = s_2 s_3 s_4 s_5 s_4 s_3 s_2$, $(36) = s_3 s_4 s_5 s_4 s_3$, $(25) = s_2 s_3 s_4 s_3 s_2$. Donc $\varphi \circ \varphi : s_1 \mapsto (34)$, $s_2 \mapsto (45)$, $s_3 \mapsto (15)$, $s_4 \mapsto (12)$, $s_5 \mapsto (26)$. Donc $\varphi \circ \varphi = \mathrm{int}_{(13524)}$ où pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_6$, on a posé $\mathrm{int}_\sigma := \sigma \cdot \sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$.

Donc φ est d'ordre 10 et φ^5 est d'ordre 2 dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$. Dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\varphi^5 = \varphi$. Donc φ^5 est un automorphisme d'ordre 2 non intérieur.

Donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $\phi \in Z(\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6))$.

Alors, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_6$, $\phi \circ \mathrm{int}_\sigma \circ \phi^{-1} = \mathrm{int}_{\phi(\sigma)} = \mathrm{int}_\sigma \Leftrightarrow \phi(\sigma) = \sigma$. Donc $\phi = 1$.

Puisque le centre est trivial, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \not\simeq \mathfrak{S}_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.