Devoir à la maison (facultatif)

Soit G un groupe simple d'ordre 168.

1) Factoriser 168.
2) Montrer que G possède 8 $7-$Sylow.
3) Soit P un $7-$Sylow. Soit $H := N_G(P)$. Montrer que $H = PQ$ pour un certain Q, $3-$Sylow de G.
4) Montrer que H est un sous-groupe propre maximal de G (*i.e.* si $H \leqslant K \leqslant G$, alors $K = H$ ou $K = G$).
5) Montrer que H est le seul groupe non abélien d'ordre 21 (à isomorphisme près). En particulier, $H \simeq B$ où B est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.
6) Montrer que H a 7 $3-$Sylow et que 2 de ces $3-$Sylow choisis au hasard engendrent H ; montrer aussi que G a 28 $3-$Sylow.
7) Soit $K := N_G(Q)$. En utilisant que $N_G(K) = K$ montrer que K a 28 conjugués dans G. En déduire que $K \simeq \mathfrak{S}_3$ (sinon K serait cyclique d'ordre 6 et G contiendrait au moins 56 éléments d'ordre 6, 56 éléments d'ordre 3, ... (en déduire une contradiction)).
8) Soit $t \in K$ d'ordre 2. Montrer que le groupe $H \times P$ agit librement sur l'ensemble HtP (*i.e.* $htp = t$, $h \in H$, $p \in P \Rightarrow h = p = 1$). En déduire que $G = H \cup HtP$.
9) On a donc tout $g \in G \setminus H$ qui s'écrit $g = pqtp'$ pour un unique triplet $(p, q, p') \in P \times Q \times P$. Soit $P^* := P \setminus \{1\}$ et $P^t := tPt$. Vérifier que $tP^*t \subseteq G \setminus H$.
10) Soit s tel que $Q = \{1, s, s^2\}$. Vérifier que $tP^*t = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ où $A_i := tP^*t \cap Ps^itP$. En utilisant que s normalise P, montrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $sA_is^{-1} = A_{i+1}$. en déduire que pour tout i, $|A_i| = 2$.
11) Montrer qu'il existe u tel que $P \cap tPtPt = \{u, u^{-1}\}$. Montrer que :
$$A_0 = \{tu^{\pm1}t\},\ A_1 = \{s^{-1}tu^{\pm1}ts\},\ A_2 = \{stu^{\pm1}ts^{-1}\}\ .$$
12) Montrer que $P^* = \{u^{\pm1}, u^{\pm2}, u^{\pm4}\}$ et que :
$$\begin{aligned} tut = u^{-1}tu^{-1},\ tu^2t = u^{-4}s^2tu^{-4},\ tu^4t = u^{-2}stu^{-2}, \\ tu^{-1}t = utu,\ tu^{-2}t = u^4s^2tu^4,\ tu^{-4}t = u^2stu^2\ . \end{aligned} \tag{1}$$
13) En déduire que la loi de groupe de $G = H \cup HtP$ est entièrement déterminée par celle de H et par les relations (1).
14) En déduire que tous les groupes simples d'ordre 168 sont isomorphes.
15) En déduire que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.
16) Montrer qu'il n'y a pas de groupe simple non abélien d'ordre $60 < n < 168$.