I — Groupes définis par générateurs et relations

Exercice 1

a) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle a \ : \ a^n = 1\rangle$.

b) Soient n un entier tel que $n > 1$ et D_n le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par

$$R := \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe D_n est appelé *groupe diédral* d'ordre $2n$. Calculer l'ordre de D_n.

c) En déduire que le sous-groupe engendré par R est un sous-groupe distingué.

d) Montrer que D_n le groupe diédral d'ordre $2n$ est isomorphe à :

$$\langle a, b \ : \ a^2 = b^n = aba^{-1}b = 1\rangle \text{ et à}$$

$$\langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = (ab)^n = 1\rangle \ .$$

e) Montrer que D_n est isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\zeta := e^{2i\pi/n}$.

Exercice 2 Soit D_∞ le groupe des bijections affines $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lambda x + \mu$. Montrer que D_∞ est engendré par $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - x$ puis que $D_\infty \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = 1\rangle$.

Exercice 3 Donner une présentation de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ avec 2 générateurs.

Exercice 4 Soit Q_8 le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

a) Calculer l'ordre de Q_8.

b) Donner tous ses sous-groupes, ses sous-groupes distingués, son centre, et ses quotients et montrer que tous les sous-groupes propres sont distingués et cycliques.

c) Montrer que $Q_8 \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^2 = (ab)^2\rangle$.

Exercice 5

a) Montrer : $\mathfrak{S}_4 \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1\rangle$.

b) Montrer : $\mathfrak{A}_4 \simeq \langle a, b \ : \ a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1\rangle$.

c) Montrer : $\mathfrak{A}_5 \simeq \langle a, b, c \ : \ a^2 = b^3 = c^5 = abc = 1\rangle$ *(montrer que le sous-groupe engendré par c est d'indice $\leqslant 12$).*

Exercice 6 Soit G le groupe défini par $\langle x, y \ : \ x^2 = y^3 = 1\rangle$. L'objectif est de montrer que G est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{Z})$.

a) Montrer que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Notons l'image de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par la projection canonique $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ par A et B, respectivement.
  i) Montrer que $A^2 = B^3 = \mathbf{1}_2$.
  ii) En déduire qu'il existe un morphisme surjectif φ de G dans $PSL(2,\mathbb{Z})$.

d) Posons $\xi = xy$ et $\eta = xy^{-1}$. Montrer que tout élément de G peut s'écrire sous la forme
$x^{\epsilon}\xi^{m_1}\eta^{n_1}\cdots\xi^{m_r}\eta^{n_r}x^{\epsilon'}$ oú $\epsilon, \epsilon' \in \{0,1\}$ et $m_i, n_i \in \mathbb{N}$.

e) Expliciter $\xi' := \varphi(\xi)$ et $\eta' := \varphi(\eta)$. En déduire que le module de la somme des composantes de $\xi'^{m_1}\eta'^{n_1}\cdots\xi'^{m_r}\eta'^{n_r}$ est au moins 3 sauf si $m_1 = n_1 = \cdots = m_r = n_r = 0$.

f) Conclure.

Exercice 7 Soit $G = \langle a, b \ : \ aba = bab\rangle$ le groupe des tresses à trois cordes. Posons $x = ab^2$ et $y = ab$.

a) Montrer que G est engendré par x et y.

b) Montrer que $x^2 = y^3 \in Z(G)$.

c) Montrer que $G/\langle x^2\rangle$ est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{Z})$.

d) En déduire que $Z(G)$ est engendré par $x^2 = y^3$ et que $G/Z(G) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$.

Exercice 8 Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle a, b \ : \ a^4 = 1, a^2 = b^3\rangle$ *(indication : remarquer que a^2 est dans le centre).*

Exercice 9 Montrer que $(\mathbb{Q}, +) \simeq \langle x_n, n \geqslant 1 \ : \ x_n = x_{nk}^k, k, n \geqslant 1\rangle$ *(indication : montrer que tout élément non trivial du membre de droite s'écrit sous la forme $x_p^{\pm q}$, $p, q \geqslant 1$ et justifier l'existence d'un morphisme de groupes $x_n \mapsto 1/n$).*

Exercice 10 Soit $G = \langle x, y\rangle$ le groupe libre engendré par deux éléments.

a) Montrer que x^2, y^3 engendrent un groupe isomorphe à G.

b) Montrer que x^2, y^2, xy engendrent un groupe isomorphe au groupe libre à 3 générateurs.

c) On pose pour tout $i \geqslant 0$, $z_i := y^i x y^{-i}$. Montrer que le groupe $\langle z_0, z_1, ...\rangle$ est un groupe libre avec un nombre dénombrable de générateurs.

Exercice 11 *(difficile)* Montrer que le groupe $\langle a, b, c \ : \ a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2\rangle$ est trivial.