II — Groupes définis par générateurs et relations *(suite)*

Exercice 1 Soit G un groupe. Soit T une partie de G. On note N le plus petit sous-groupe distingué de G contenant T. Montrer que $N = \langle S \rangle$ où $S = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$;

Exercice 2 Soit G_n le groupe

$$\langle s_1, ..., s_n \ : \ \forall\, i,\, s_i^2 = 1,\, \forall\, i, (s_i s_{i+1})^3 = 1,\, \forall\, j \geqslant i+2,\, (s_i s_j)^2 = 1 \rangle \ .$$

a) On pose $H := \langle s_2, ..., s_n \rangle \leqslant G_n$. Montrer que

$$G_n/H = H \cup s_1 H \cup s_2 s_1 H \cup ... \cup s_n ... s_1 H \ .$$

b) Montrer par récurrence sur n que $G_n \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$.

Exercice 3 Montrer que

$$\mathfrak{S}_n \simeq \langle x_i,\, 1 \leqslant i \leqslant n-1 \ : \ \forall\, i,j,k \neq,\, x_i^2 = (x_i x_j)^3 = (x_i x_j x_i x_k)^2 = 1 \rangle$$

(indication : considérer les transpositions $(1i)$ et si $H := \langle x_1, ..., x_{n-2} \rangle$, vérifier que $\langle x_1, ..., x_{n-2} \rangle = H \cup x_{n-1} H \cup x_1 x_{n-1} H \cup ... \cup x_{n-2} x_{n-1} H$).

Exercice 4 Montrer que :

$$\mathfrak{A}_n \simeq \langle x_i,\, 1 \leqslant i \leqslant n-2 : x_1^3 = 1, \forall i \geqslant 2, x_i^2 = 1, \forall i, (x_i x_{i+1})^3 = 1, \forall j > i+1,\, (x_i x_j)^2 = 1 \rangle$$

(indication : si $G := \langle x_i,\, 1 \leqslant i \leqslant n-2 \rangle$, si $H = \langle x_i,\, 1 \leqslant i \leqslant n-3 \rangle$, montrer que $G = H \cup x_{n-2} H \cup ... \cup x_1 ... x_{n-2} H \cup x_1^2 x_2 .... x_{n-2} H$).

Exercice 5

a) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ contient un sous-groupe H isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ *(indication : utiliser la présentation $\mathfrak{A}_5 = \langle x, y \ : \ x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1 \rangle$ et considérer les matrices :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $i^2 = -1$).

b) En déduire, en considérant l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)/H$ que :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6 \ .$$

Exercice 6 Montrer que les groupes simples $\mathfrak{A}_8$ et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ ont même cardinal mais ne sont pas isomorphes *(indication : en utilisant la forme réduite de Jordan des matrices, montrer que dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ les éléments d'ordre 2 sont conjugués).*

Exercice 7 Soit G le groupe de présentation :

$$\langle r, s, t \ : \ r^2 = s^3 = t^3 = rst \rangle \ .$$

a) Montrer que rst est dans le centre de G et que $G/\langle rst\rangle \simeq \mathfrak{A}_4$.

b) Montrer que G est d'ordre 24 *(indication : poser $x = st$, $y = s^2ts^{-1}$, vérifier que $x^2 = y^2 = (xy)^2$ et montrer que $(rst)^2 = 1$).*

c) Montrer que G ne contient pas de sous-groupe d'ordre 12.

Exercice 8 Aut(Q_8)

On rappelle que Q_8 est engendré par i, j avec les relations $i^2 = j^2 = (ij)^2$.

a) Si $\varphi \in \mathrm{Aut}(Q_8)$, vérifier que $\varphi(-1) = -1$. En déduire que $\mathrm{Aut}(Q_8)$ est d'ordre au plus 24.

b) Justifier l'existence de $s, t \in \mathrm{Aut}(Q_8)$ tels que $s : i \mapsto -j$, $j \mapsto i$, $t : i \mapsto -j$, $j \mapsto ij$.

c) Quel est l'ordre de s ? de t ? de st ? En déduire qu'il existe un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{Aut}(Q_8)$ dont l'image contient s, t.

d) Montrer que l'image du morphisme ci-dessus est un multiple de 12 et en déduire que $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Aut}(Q_8)$.