# III — Produits semidirects

**Exercice 1**

a) Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec un entier strictement positif. En déduire l'identité de Bézout.

b) Montrer que $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ n'est pas de type fini.

c) On considère le groupe $G = (\mathbb{R}, +)$

  i) Montrer que les sous-groupes de $G$ sont soit monogènes soit dense.

  ii) Donner un exemple d'un sous-groupe de $G$ dense et de type fini.

  iii) Tous les sous-groupes de $G$ sont-ils de type fini ?

d) Montrer que $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}, +)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e) Montrer que $\mathrm{Aut}((\mathbb{Q}, +)) \simeq (\mathbb{Q}^\times, \times)$.

**Exercice 2**

a) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer (à isomorphisme près tous les produits semidirects de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ *(indication : choisir une bonne action sur l'ensemble des éléments d'ordre* 2 *de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*)*, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_3) \simeq \mathfrak{S}_3$. Déterminer tous les produits semidirects de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (*vérifier qu'il y a* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*,* $D_6$ *le groupe diédral d'ordre* 12 *et* $\mathfrak{A}_4$).

**Exercice 3**

a) Montrer que $\mathrm{Aut}(Z/p^n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, si $p$ premier impair, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$ si $p = 2$. En déduire les $n$ tels que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est cyclique.

b) Montrer que $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ pour tout $p$ premier.

**Exercice 4** *a) Montrer que* $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathfrak{A}_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

*b) Montrer que* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$ *(indication : considérer les matrices* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *et utiliser la présentation* $\mathfrak{A}_4 = \langle a, b \,:\, a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1\rangle$*).*

*c) Montrer que la suite :*

$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \to 1$$

*n'est pas scindé (indication : considérer les éléments d'ordre* 2*).*

**Exercice 5** Soit $n \geqslant 1$. Soient $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$, $B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \;:\; x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$.

Montrer que $B_i \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_i} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et déterner $\varphi_i$. Montrer que $B_1 \not\simeq B_2$ si $n \geqslant 3$ *(considérer les centres).*

**Exercice 6**

a) Montrer que tout groupe fini est un sous-groupe d'un certain $\mathfrak{A}_n$.

b) Existe-t-il un morphisme injectif $\mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{A}_4$ ?

c) En faisant agir $\mathfrak{S}_4$ sur ses doubles transpositions, montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\phi : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$. Déterminer son noyau. Existe-t-il une section de $\phi$ *i.e.* un morphisme $\psi : \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_4$ tel que $\phi\psi = \mathrm{Id}$ ? (autrement-dit, a-t-on : $\mathfrak{S}_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathfrak{S}_3$ ?

**Exercice 7** Soit $z := e^{i\pi/4}$. On pose :

$$s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; g_3 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^3 \end{pmatrix}, \; g_5 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^5 \end{pmatrix}, \; g_7 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^7 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Quel est l'ordre des matrices $s, g_3, g_5, g_7$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ?

c) On pose $G_i := \langle g_i, s\rangle$ pour $i = 3, 5, 7$. Exprimer $sg_is$ comme une puissance de $g_i$ pour $i = 3, 5, 7$.

d) Montrer que $\langle g_i\rangle$ est un sous-groupe distingué d'indice 2 dans $G_i$ pour $i = 3, 5, 7$.

e) Montrer que $G_3 = \left\{g_3^k \; : \; k \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{g_3^k s \; : \; k \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right\}$ et trouver les éléments d'ordre 2 de $G_3$.

f) Trouver un morphisme de groupes :

$$\phi_3 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

tel que $G_3 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_3} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

g) Quels sont les éléments d'ordre 2 de $G_3$ ?

h) Déterminer de même des morphismes de groupes :

$$\phi_5, \phi_7 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

tels que $G_5 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_5} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G_7 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer aussi les éléments d'ordre 2 de $G_5$ et $G_7$.

i) Montrer que les groupes $G_3, G_5, G_7$ sont deux à deux non isomorphes.