

V — SOUS-GROUPES DE SYLOW

Exercice 1 Soit $n \geq 5$. On rappelle que le groupe \mathfrak{A}_n est simple.

- Soit G un sous-groupe distingué de \mathfrak{S}_n . Montrer que $G = \{1\}$, \mathfrak{A}_n , ou \mathfrak{S}_n .
- Soit G un sous-groupe d'indice n de \mathfrak{S}_n . En considérant une action de G sur \mathfrak{S}_n/G , montrer que $G \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 2 Déterminer le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Donner un p -Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ et en déduire que tous les produits semidirects

$$\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p$$

non directs sont isomorphes.

Exercice 3

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 12.

Exercice 4

- Soit G un groupe d'ordre 12 non abélien. Montrer que G est un produit semi-direct et qu'il y a 3 possibilités (à isomorphisme près) (*compter les 2-Sylow et 3-Sylow*).
- Montrer que $\langle a, b : a^4 = b^3 = a^{-1}bab = 1 \rangle$ est d'ordre 12 et isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^6 = 1 \rangle$ est d'ordre 12 et isomorphe au groupe diédral d'ordre 12.
- Vérifier que le groupe \mathfrak{A}_4 est *la troisième possibilité*.

Exercice 5 Montrer que \mathfrak{S}_5 possède un sous-groupe d'ordre 20.

Exercice 6 Soit G un groupe d'ordre 20 et n_2 le nombre de 2-Sylow sous-groupes de G .

- Montrer qu'il existe un seul 5-Sylow sous-groupe S de G et que le nombre n_2 est égal à 1 ou 5.
- Supposons que $n_2 = 1$ et notons le seul 2-Sylow sous-groupe de G par T .
 - Montrons que G est isomorphe à $S \times T$.
 - Déterminer les possibles structures de G .
- Supposons que $n_2 = 5$ et notons un 2-Sylow sous-groupe de G par T . Montrer que $G \cong S \rtimes T$.

Exercice 7 Soit p un nombre premier. On pose : $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Montrer que le sous-groupe U de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ engendré par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un p -Sylow.

- b) Déterminer le normalisateur de U dans $SL_2(\mathbb{F}_p)$ et en déduire le nombre de p -Sylow de $SL_2(\mathbb{F}_p)$.
- c) Soit G un groupe fini et P un p -Sylow de G . Montrer que $NN(P) = N(P)$ et vérifier que c'est bien le cas pour $SL_2(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 8 Soit p un nombre premier.

- a) Calculer le nombre d'éléments de \mathfrak{S}_p d'ordre p .
- b) En déduire le nombre de p -Sylow sous-groupe de \mathfrak{S}_p .
- c) A l'aide du théorème de Sylow, retrouver la formule de Wilson $(p-1)! = -1 \pmod{p}$.

Exercice 9 Montrer que $\langle a, b : a^7 = b^3 = bab^{-1}a^{-2} = 1 \rangle$ est le seul groupe non abélien d'ordre 21 (à isomorphisme près).

Exercice 10

- a) Déterminer tous les groupes abéliens d'ordre 36 (à isomorphisme près).
- b) Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre n ? (donner une formule en fonction de la décomposition de n en facteurs premiers)