VI

Exercice 1

Si G est un groupe, on note $\widehat{G} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{C}^\times)$.

a) Si $n \geqslant 1$, montrer que $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Si G est abélien fini, montrer que $\widehat{G} \simeq G$.

c) Si G est fini, montrer que $\widehat{G} \simeq G/(G,G)$.

d) En déduire que $\widehat{Q_8} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $\widehat{D_n} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exercice 2 Soit $n \geqslant 2$. Soit K un corps commutatif. On admettra que $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les $x_{i,j}(t) := 1 + tE_{i,j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

a) Si i, j, k sont deux à deux distincts, calculer $x_{i,j}(a)x_{j,k}(b)x_{i,j}(a)^{-1}x_{j,k}(b)^{-1}$.

b) Si $n = 2$, calculer :

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} x_{1,2}(a) \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} x_{1,2}(a)^{-1} \ .$$

c) En déduire que $(\mathrm{SL}_n(K), \mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$ si $(n, |K|) \neq (2,2), (2,3)$. Déterminer $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2))$ et $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$.

d) Si $(n, |K|) \neq (2,2), (2,3)$, montrer que tout morphisme $\mathrm{SL}_n(K) \to \mathbb{C}^\times$ est trivial.

e) Montrer que pour tout morphisme $\chi : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathbb{C}^\times$, il existe un unique $\overline{\chi} : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\chi = \overline{\chi} \circ \det$. Quels sont les $\overline{\chi}$ possibles si $K = \mathbb{C}^\times$ et si K est fini ?

Exercice 3 Soit G un groupe simple d'ordre 60. Montrer que G a exactement 6 $5-$Sylow. En déduire un morphisme $G \to A_6$ et un isomorphisme $G \simeq A_5$.

Exercice 4 Soit $n \geqslant 2$.

a) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. On suppose que ϕ envoie une transposition sur une transposition. Montrer que ϕ est un automorphisme intérieur *(indication : on suppose que $\phi((12)) = (a_1a_2)$, $\phi((23)) = (a_2a_3)$; montrer qu'il existe $a_4, ..., a_n \in \{1, ..., n\}$ tels que $\phi((ii+1)) = (a_ia_{i+1})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$)*.

b) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que ϕ permute les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.

c) Déterminer le nombre de transpositions dans $\mathfrak{S}_n$. Plus généralement déterminer le cardinal de la classe de conjugaison d'une involution (un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ d'ordre 2).

d) En déduire que si $n \neq 6$, tous les automorphismes sont intérieurs.

e) Montrer que $\mathfrak{S}_5$ a 6 $5-$Sylow. En déduire un morphisme $\mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_6$. On note H l'image de ce morphisme. On note $\phi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ le morphisme induit par l'action de $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathfrak{S}_6/H$. Montrer que ϕ n'est pas un automorphisme intérieur (*indication : on numérote $g_1H, ..., g_6H$ les classes à droite de $\mathfrak{S}_6/H$ avec $g_1 = 1$; pour tout i, $H_i := \{\sigma \in \mathfrak{S}_6 : \sigma(i) = i\}$; montrer que $\phi(H) = H_1$ mais que $\forall\ i$, $H \neq H_i$*)

f) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 Un groupe G qui possède une suite de sous-groupes

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

telle que $H_i \lhd H_{i+1}$ et que le groupe H_{i+1}/H_i soit abélien pour chaque i, est appelé **résoluble**.

1. Montrer que G est résoluble si et seulement si $\mathscr{D}^i(G) = 1$ pour i assez grand (où $\mathscr{D}^1(G) := (G, G)$ et $\mathscr{D}^i(G) := (\mathscr{D}^{i-1}(G), \mathscr{D}^{i-1}(G))$).
2. Si G est fini, vérifier que l'on peut remplacer abélien par cyclique dans la définition de « résoluble ».
3. Soit $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$ une suite exacte. Montrer que G_2 est résoluble si et seulement si G_1 et G_3 le sont.
4. Montrer que les groupes suivants sont résolubles : $\mathfrak{S}_n$ $(n \leqslant 4)$, D_n, p-groupes, groupes d'ordre pq, p^2q et pqr, où p, q et r sont nombres premiers distincts.
5. Montrer que tous les groupes d'ordre < 60 sont résolubles.

Exercice 6 *a) En faisant agir* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ *sur l'ensemble des droites vectorielles de* $\mathbb{F}_4^2$*, montrer que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$.

b) Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.