VII

Exercice 1 *a) Quel est le dernier chiffre de* 7^{3^9} *?*

b) Trouver les trois derniers chiffres de 777^{401}.

Exercice 2 *Trouver tous les entiers* n *tels que* $8n = 1 \bmod 13$.

Exercice 3 *Soit* A *un anneau commutatif.*

a) Soit $x \in A$ *un élément inversible et* $y \in A$ *un élément nilpotent. Montrer que* $x + y$ *est inversible.*

b) Soit x *et* y *deux éléments nilpotents de* A. *Montrer que* $x + y$ *est nilpotent.*

Exercice 4 *Soit* A *un anneau intègre et* $d \in A \backslash A^\times$ *un élément non nul.*

a) Montrer que tout idéal de $A\left[\frac{1}{d}\right]$ *s'écrit sous la forme* $IA\left[\frac{1}{d}\right]$, *où* I *est un idéal de* A.

b) En déduire que, si A *est principal,* $A\left[\frac{1}{d}\right]$ *l'est aussi.*

c) Montrer que $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ *puis que* $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ *sont des anneaux principaux.*

d) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ *n'est pas principal.*

Exercice 5 *Soit* $\mathbb{D}$ *l'anneau des décimaux.*

a) Quels sont les irréductibles ?

b) Calculer le PGCD de $0,77$ *et* 910.

Exercice 6 *Posons* $A := \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. *On définit l'application* $N : A \to \mathbb{Z}$ *par* $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

a) Montrer que, pour tous $x, y \in A$, *on a* $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) Montrer que l'anneau A *est euclidien.*

c) Montrer que $A^\times$ *est infini (indication :* $x \in A^\times \Rightarrow \forall\, n, x^n \in A^\times$*).*

d) Trouver tous les diviseurs de 14 *mod.* $A^\times$.

Exercice 7 *Soit* $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

a) Déterminer $A^\times$. *Ensuite, trouver tous les diviseurs de* 12.

b) Posons $I := (2, 1 + \sqrt{-5}) \subset A$. *Calculer* I^2.

c) Posons $J := (4, 1 - \sqrt{-5}) \subset A$. *Calculer* $I + J$ *et* IJ.

Exercice 8 *Soit* $A := \mathbb{Z}[i]$, *l'anneau des entiers de Gauss.*

a) Montrer que $A/(7) \cong \mathbb{F}_7[X]/(X^2 + 1)$.

b) En déduire que 7 *est irréductible dans* A.

c) Soit p *un nombre premier impair. Montrer que* $\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ *ou* $\mathbb{F}_{p^2}$. *Montrer que ce n'est pas vrai si* $p = 2$.

Exercice 9 *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif et* $A = \mathbb{K}[[X]]$ *l'anneau des séries formelles d'une variable. Notons la valuation standard de* A *par* ν.

a) Quel sont les inversibles de A *?*

b) *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[[X]]$ tels que $\nu(P) \leqslant \nu(Q)$. Montrer que P divise Q.*

c) *En déduire que A est principal. L'anneau A est-il euclidien ?*

d) *Montrer qu'il existe un et un seul idéal maximal. On le note par $\mathfrak{m}$.*

e) *Montrer que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, il existe $n \in \mathbb{N}^\times$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$.*

f) *Notons $\mathbb{K}((X))$ le corps des fractions de $\mathbb{K}[[X]]$.*

  (a) *Montrer que $\mathbb{K}((X)) = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k \ : \ \exists\ i \text{ t.q. } a_k = 0 \ (\forall\ k < i)\}$.*

  (b) *En déduire que, pour tout $f \in \mathbb{K}((X))\backslash\{0\}$, $f \in \mathbb{K}[[X]]$ ou $f^{-1} \in \mathbb{K}[[X]]$.*

Exercice 10 *Soit X un espace topologique et $\mathscr{C}(X)$ l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$.*
(Il est connu que, lorsque X est compact, $\mathscr{C}(X)$ est une C^*-algèbre commutative avec unité.)
Montrer que, pour tout $P \in X$, $\mathfrak{m}_P := \{f \in \mathscr{C}(X) | f(P) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathscr{C}(X)$.

Exercice 11 *On sait que l'anneau $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ n'est pas euclidien. L'objectif est de montrer que A est principal.*

1. *Montrer que si a et b sont non nuls dans A, alors on peut trouver $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$, ou $2a = bq + r$, avec $N(r) < N(b)$.*
2. *a)* *Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.*
   b) *En déduire que $A/(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.*
   c) *Montrer que (2) est un idéal maximal de A.*
3. *Soit I un idéal de A et b un élément non nul de I de norme minimale. Soit $a \in I$. On suppose que $a = bq + r$. Montrer que $a \in (b)$.*
4. *On suppose ici que $2a = qb + r$.*
   a) *Montrer que $2a = qb$.*
   b) *On suppose que 2 divise q. Montrer que $a \in (b)$.*
   c) *On suppose maintenant que 2 ne divise pas q.*
      a) *Montrer que 2 divise b. On pose $b' := \frac{1}{2}b$.*
      b) *Montrer que 2 et q engendrent A comme idéal. En déduire que $b' \in I$.*
      c) *Conclure.*

Exercice 12 *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ et $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ sont des anneaux euclidiens.*