VIII

Exercice 1

a) Montrer que les seules solutions de $y^2+4=x^3$ dans $\mathbb{Z}$ sont $(\pm 11, 5)$ et $(\pm 2, 2)$ *(indication : raisonner dans l'anneau principal* $\mathbb{Z}[i]$*).*

b) Montrer que les seules solutions de $y^2+2=x^3$ dans $\mathbb{Z}$ sont $(3, \pm 5)$ *(indication : raisonner dans l'anneau principal* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$*).*

Exercice 2 Calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{K}[T^2, T^3]$, T^5 et T^6 n'ont pas de PGCD.

Exercice 4 Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(XZ-Y^2)$ n'est pas factoriel. (*On pourra montrer que cet anneau est isomorphe à* $\mathbb{C}[U^2, UV, V^2] \subset \mathbb{C}[U,V]$).

Exercice 5 (**Critère de réduction**) Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions, p un élément irréductible de A et $\overline{K}$ le corps des fractions de $A/(p)$. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ tel que p ne divise pas a_n et $\overline{P} = \sum_{i=0}^n \overline{a}_i X^i$ est un polynôme irréductible de $\overline{K}[X]$, où $\overline{a}_i$ est l'image de a_i par la projection canonique $A \to A/(p)$. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ (et donc dans $A[X]$ si le pgcd de ses coefficients est 1). En considérant la réduction modulo 3, montrer que $X^3 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 6 (**Critère d'Eisenstein**) Soient A un anneau factoriel et K son corps des fractions. Soient q un élément irréductible de A et $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ un polynôme de $A[X]$ tels que : q ne divise pas a_n, $q | a_i$ pour $0 \leqslant i < n$ et q^2 ne divise pas a_0. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ (et donc dans $A[X]$ si le pgcd de ses coefficients est 1). En déduire que pour tout nombre premier p, $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 7 Etudier l'irréductibilité de $X^2+Y^2+Z^2$ sur un corps $\mathbb{K}$.

Exercice 8

a) Factoriser $X^4 - 2$ sur $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$.

b) Montrer que X^4+1 est réductible $\bmod p$ pour tout nombre premier p.

Exercice 9 L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas de solution de l'équation suivante dans $\mathbb{Z}^3$:

$$X^3 + Y^3 = Z^3, \qquad XYZ \neq 0. \tag{1}$$

Par l'absurde, on suppose qu'il en existe une. Suppose que (X, Y, Z) est une solution de (1) telle que $|XYZ|$ soit minimal.

a) Montrer que X, Y ou Z est pair.

On supposera dans la suite que Z est pair.

b) Montrer que X et Y sont premiers entre eux.

c) Soient $U, V \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tels que $X = U + V$ et $Y = U - V$. Montrer que U et V sont des entiers premiers entre eux et de parités différentes.

d) On suppose que 3 ne divise pas Z. Montrer qu'il existe $S, W \in \mathbb{Z}$ tels que $2U = S^3$ et $U^2 + 3V^2 = W^3$.

e) (Fait en cours) En travaillant dans $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$, montrer que

$$2U = (2a + b)(a - b)(a + 2b), \qquad 2V = 3ab(a + b),$$

avec les entiers a et b premiers entre eux.

f) Montrer que $a-b, a+2b$ et $2a+b$ sont des cubes. En déduire une plus petite solution de (1).

g) Traiter le cas où $3|Z$.

Exercice 10 Soit k un corps.

a) Montrer que si $f \in k[K]$, $g \in k[Y]$ sont des polynômes non nuls, alors $k[X, Y]/(f, g)$ est de dimension $\leqslant \deg f \deg g$.

b) Montrer que l'idéal $(X, Y)^n$ peut être engendré par $n+1$ éléments mais non moins *(indication trouver la dimension de $(X, Y)^n/(X, Y)^{n+1}$)*.

c) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$. Montrer que $\mathfrak{m}$ n'est pas principal. Montrer que $\mathfrak{m}$ contient un vrai polynôme non nul en X et un vrai polynôme non nul en Y. En déduire que $\mathfrak{m} = (X - x, Y - y)$ pour certains $x, y \in \mathbb{C}$.

d) Montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont :

$$0, (f), \ f \text{ irréductible}, (X - x, Y - y), x, y \in \mathbb{C} \ .$$

Exercice 11 Soit A un anneau euclidien et ν un stathme associé. Soit $S \subseteq A$ une partie qui ne contient pas 0, qui contient 1 et qui est stable par produit.

Montrer que l'anneau

$$S^{-1}A := \{a/s \ : \ a \in A, s \in S\}$$

est euclidien pour $\nu'(x) := \inf\{\nu(kx) \ : \ k \in S, \ kx \in A\}$.

Exercice 12 Soit A un anneau intègre.

Montrer que si A est euclidien, il existe $x \in A$ non inversible tel que $A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$, $a \mapsto a \bmod x$ est surjective *(indication : si A n'est pas un corps, si ν est un stathme pour A, choisir x non inversible avec $\nu(x)$ minimal)*.

Exercice 13 Soit $A := \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$.

a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X, Y]$, alors $P = a(X)Y + b(X) \bmod X^2 + Y^2 + 1$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que l'on peut toujours trouver une solution $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ au système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ a(x)y + b(x) = 0 \end{cases}$$

et en déduire que $A^\times = \mathbb{R}^\times$.

c) Montrer que A n'est pas euclidien.

d) Montrer que tous les idéaux premiers non nuls de A sont principaux et maximaux *(indication : montrer qu'un idéal* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathbb{R}[X,Y]$ *qui contient* X^2+Y^2+1 *est de la forme* $\mathfrak{p}=(X^2+Y^2+1, aX+bY+c)$ *pour certains* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *avec* a *ou* b *non nul).*

e) Soit I un idéal non principal tel que $\dim A/I$ soit minimale. Montrer que $I \subsetneq (p)$ pour un certain p premier et que $J := \{x\in A\ :\ xp\in I\}$ est un idéal contenant I strictement *(indication : soit* $x\in I$ *non nul tel que* $\dim A/x$ *est minimale, montrer que* $x/p\in J\setminus I$*).* En déduire que J est principal engendré par un certain $a\in A$. Trouver une contradiction *(indication :* $I=(pa)$*).*

f) Conclusion ?