II — Groupes définis par générateurs et relations *(suite)*

Exercice 1 Soit $G = \langle a, b \ : \ aba = bab \rangle$ le groupe des tresses à trois cordes. Posons $x = ab^2$ et $y = ab$.

a) Montrer que G est engendré par x et y.

b) Montrer que $x^2 = y^3 \in Z(G)$.

c) Montrer que $G/\langle x^2 \rangle$ est isomorphe à $PSL(2, \mathbb{Z})$.

d) En déduire que $Z(G)$ est engendré par $x^2 = y^3$ et que $G/Z(G) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Exercice 2 Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle a, b \ : \ a^4 = 1, a^2 = b^3 \rangle$ *(indication : remarquer que a^2 est dans le centre).*

Exercice 3 Montrer que $(\mathbb{Q}, +) \simeq \langle x_n, n \geqslant 1 \ : \ x_n = x_{nk}^k, k, n \geqslant 1 \rangle$ *(indication : montrer que tout élément non trivial du membre de droite s'écrit sous la forme $x_p^{\pm q}$, $p, q \geqslant 1$ et justifier l'existence d'un morphisme de groupes $x_n \mapsto 1/n$).*

Exercice 4 Soit $G = \langle x, y \rangle$ le groupe libre engendré par deux éléments.

a) Montrer que x^2, y^3 engendrent un groupe isomorphe à G.

b) Montrer que x^2, y^2, xy engendrent un groupe isomorphe au groupe libre à 3 générateurs.

c) On pose pour tout $i \geqslant 0$, $z_i := y^i x y^{-i}$. Montrer que le groupe $\langle z_0, z_1, ... \rangle$ est un groupe libre avec un nombre dénombrable de générateurs.

Exercice 5 *(difficile)* Montrer que le groupe $\langle a, b, c \ : \ a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle$ est trivial.

Exercice 6 Soit G un groupe. Soit T une partie de G. On note N le plus petit sous-groupe distingué de G contenant T. Montrer que $N = \langle S \rangle$ où $S = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$;

Exercice 7 Soit G_n le groupe

$$\langle s_1, ..., s_n \ : \ \forall \ i, \ s_i^2 = 1, \forall \ i, (s_i s_{i+1})^3 = 1, \forall \ j \geqslant i+2, \ (s_i s_j)^2 = 1 \rangle \ .$$

a) On pose $H := \langle s_2, ..., s_n \rangle \leqslant G_n$. Montrer que

$$G_n/H = H \cup s_1 H \cup s_2 s_1 H \cup ... \cup s_n ... s_1 H \ .$$

b) Montrer par récurrence sur n que $G_n \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$.

Exercice 8 Montrer que

$$\mathfrak{S}_n \simeq \langle x_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \ : \ \forall \ i, j, k \neq, \ x_i^2 = (x_i x_j)^3 = (x_i x_j x_i x_k)^2 = 1 \rangle$$

(indication : considérer les transpositions $(1i)$ et si $H := \langle x_1, ..., x_{n-2} \rangle$, vérifier que $\langle x_1, ..., x_{n-2} \rangle = H \cup x_{n-1} H \cup x_1 x_{n-1} H \cup ... \cup x_{n-2} x_{n-1} H$).

Exercice 9 Montrer que :

$\mathfrak{A}_n \simeq \langle x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n-2 : x_1^3 = 1, \forall i \geqslant 2, x_i^2 = 1, \forall i, (x_i x_{i+1})^3 = 1, \forall j > i+1,\ (x_i x_j)^2 = 1\rangle$

(indication : si $G := \langle x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n-2\rangle$*, si* $H = \langle x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n-3\rangle$*, montrer que* $G = H \cup x_{n-2}H \cup ... \cup x_1...x_{n-2}H \cup x_1^2 x_2....x_{n-2}H$*).*

Exercice 10

a) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ contient un sous-groupe H isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ *(indication : utiliser la présentation* $\mathfrak{A}_5 = \langle x, y\ :\ x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1\rangle$ *et considérer les matrices :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $i^2 = -1$*).*

b) En déduire, en considérant l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)/H$ que :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6\ .$$

Exercice 11 Montrer que les groupes simples $\mathfrak{A}_8$ et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ ont même cardinal mais ne sont pas isomorphes *(indication : en utilisant la forme réduite de Jordan des matrices, montrer que dans* $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ *les éléments d'ordre* 2 *sont conjugués).*

Exercice 12 Soit G le groupe de présentation :

$$\langle r, s, t\ :\ r^2 = s^3 = t^3 = rst\rangle\ .$$

a) Montrer que rst est dans le centre de G et que $G/\langle rst\rangle \simeq \mathfrak{A}_4$.

b) Montrer que G est d'ordre 24 *(indication : poser* $x = st$*,* $y = s^2ts^{-1}$*, vérifier que* $x^2 = y^2 = (xy)^2$ *et montrer que* $(rst)^2 = 1$*).*

c) Montrer que G ne contient pas de sous-groupe d'ordre 12.

Exercice 13 Aut(Q_8)

On rappelle que Q_8 est engendré par i, j avec les relations $i^2 = j^2 = (ij)^2$.

a) Si $\varphi \in \mathrm{Aut}(Q_8)$, vérifier que $\varphi(-1) = -1$. En déduire que $\mathrm{Aut}(Q_8)$ est d'ordre au plus 24.

b) Justifier l'existence de $s, t \in \mathrm{Aut}(Q_8)$ tels que $s : i \mapsto -j$, $j \mapsto i$, $t : i \mapsto -j$, $j \mapsto ij$.

c) Quel est l'ordre de s ? de t ? de st ? En déduire qu'il existe un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{Aut}(Q_8)$ dont l'image contient s, t.

d) Montrer que l'image du morphisme ci-dessus est un multiple de 12 et en déduire que $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Aut}(Q_8)$.