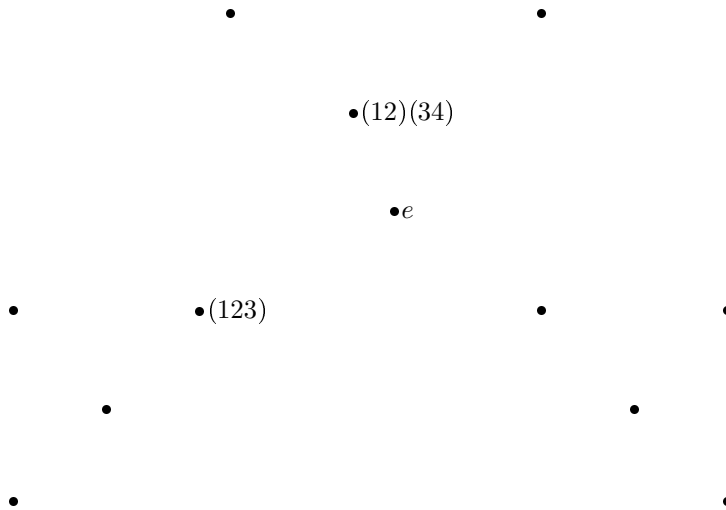


III — PRODUITS SEMIDIRECTS

Exercice 1 Compléter le graphe de Cayley de A_4 pour les générateurs $a = (12)(34)$, $b = (123)$:

**Exercice 2**

- Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec un entier strictement positif. En déduire l'identité de Bézout.
- Montrer que $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ n'est pas de type fini.
- On considère le groupe $G = (\mathbb{R}, +)$
 - Montrer que les sous-groupes de G sont soit monogènes soit dense.
 - Donner un exemple d'un sous-groupe de G dense et de type fini.
 - Tous les sous-groupes de G sont-ils de type fini ?
- Montrer que $\text{Aut}((\mathbb{Z}, +)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Montrer que $\text{Aut}((\mathbb{Q}, +)) \simeq (\mathbb{Q}^\times, \times)$.

Exercice 3

- Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer (à isomorphisme près) tous les produits semidirects de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$ (indication : choisir une bonne action sur l'ensemble des éléments d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), $\text{Aut}(\mathfrak{S}_3) \simeq \mathfrak{S}_3$. Déterminer tous les produits semidirects de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (vérifier qu'il y a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, D_6 le groupe diédral d'ordre 12 et \mathfrak{A}_4).

Exercice 4

- Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, si p premier impair, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$ si $p = 2$. En déduire les n tels que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est cyclique.
- Montrer que $\text{Aut}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ pour tout p premier.

Exercice 5 a) Montrer que $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathfrak{A}_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- b) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$ (indication : considérer les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et utiliser la présentation $\mathfrak{A}_4 = \langle a, b : a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle$).

- c) Montrer que la suite :

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \rightarrow 1$$

n'est pas scindé (indication : considérer les éléments d'ordre 2).

Exercice 6 Soit $n \geq 1$. Soient $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$, $B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} : x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$.

Montrer que $B_i \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi_i} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et décrire φ_i . Montrer que $B_1 \not\cong B_2$ si $n \geq 3$ (considérer les centres).

Exercice 7 Soit $z := e^{i\pi/4}$. On pose :

$$s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g_3 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^3 \end{pmatrix}, g_5 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^5 \end{pmatrix}, g_7 := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^7 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Quel est l'ordre des matrices s, g_3, g_5, g_7 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?
- On pose $G_i := \langle g_i, s \rangle$ pour $i = 3, 5, 7$. Exprimer $sg_i s$ comme une puissance de g_i pour $i = 3, 5, 7$.
- Montrer que $\langle g_i \rangle$ est un sous-groupe distingué d'indice 2 dans G_i pour $i = 3, 5, 7$.
- Montrer que $G_3 = \{g_3^k : k \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\} \cup \{g_3^k s : k \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$ et trouver les éléments d'ordre 2 de G_3 .
- Trouver un morphisme de groupes :

$$\phi_3 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

tel que $G_3 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_3} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- g) Déterminer de même des morphismes de groupes :

$$\phi_5, \phi_7 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$$

tels que $G_5 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_5} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G_7 \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \rtimes_{\phi_7} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer aussi les éléments d'ordre 2 de G_5 et G_7 .

- h) Montrer que les groupes G_3, G_5, G_7 sont deux à deux non isomorphes.