# Corrigé du partiel du 24 novembre 2015

**Exercice 1** *1. Un seul morphisme non trivial :* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{\pm \mathrm{Id}\}$, $y \mapsto (-Id)^y$. *(Comme* $-Id$ *est d'ordre* 2, $(-Id)^y$ *ne dépend pas du représentant choisi de* $y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$.

*2.* $\langle(1,0)\rangle = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times 0$ *et* $\langle(0,1)\rangle = 0 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $\forall x, y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $(x,y) = (1,0)^x * (0,1)^y$.

*3.* $(2,2) * (x,y) * (2,2)^{-1} = (2+x, 2+y) * (2,2) = (x+2+(-1)^{(y+2)}2, y) = (x+2 \pm 2, y) = (x,y)$ *pour tous* $x, y$. $|\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}/\langle(2,2)\rangle| = 8$.

*4. Dans* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $(0,1)^2 = (0,2) = (1,1)^2 = (2,0)*(2,2) = (1,0)^2 \bmod H$.

*5. Soit* $\phi : L_2(a,b)^\dagger \to H$ *le morphisme* $a \mapsto (1,0)$, $b \mapsto (0,1)$. *Comme* $\phi(a^2) = \phi(b)^2 = \phi(ab)^2$, $\phi$ *induit un morphisme* $Q_8 \to H$, $a \mapsto (1,0)$, $b \mapsto (0,1)$. *D'après la question 2, c'est surjectif.*

*6.* $b^2 = abab \Rightarrow b = aba \Rightarrow 1 = b^{-1}aba \Rightarrow a^{-1} = b^{-1}ab$. *Donc* $b^{-1}a^2b = a^{-2} \Rightarrow b^{-1}b^2b = a^{-2} \Rightarrow b^2 = a^{-2} \Rightarrow a^2 = a^{-2} \Rightarrow a^4 = b^4 = 1$.

*7.* $b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow \langle a\rangle \lhd Q_8$. *donc* $|Q_8| = |\langle a\rangle||Q_8/\langle a\rangle| \leqslant 4.2 = 8$. *Donc* $Q_8 \to H$ *est de noyau trivial* $\Rightarrow Q_8 \simeq H$.

**Exercice 2** *1.* $|G| = (3^2-1)(3^2-3) = 48$.

*2.* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{ac}{ad-bc} & a^2 \\ -c^2 & 1 + \frac{ac}{ad-bc} \end{pmatrix}$. *Donc* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N(P_1) \Leftrightarrow c = 0$. *On a :* $n_3(G) = [G : N(P_1) = 48/(4.3) = 4$.

*3.* $N(P_1) \cap N(P_2) = \{\text{matrices diagonales}\} =$ *sous-groupe d'ordre* 4. *Par ex.* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin N(P_1) \cap N(P_2)$.

*4. Le noyau est* $\bigcap_i N(P_i)$ *est contenu strictement (car distingué) dans* $N(P_1) \cap N(P_2)$ *qui est d'ordre* 4. *Comme* $-I_2$ *est dans le noyau, le noyau est* $\{\pm I_2\}$. *Comme de plus* $|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})| = 24$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq S_4$.

*5.* $P_1 \leqslant \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ *et* $\forall\, i, \exists\, g \in G$, $P_i = gP_1g^{-1} \leqslant g\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})g^{-1} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. *Dans chaque* $3-$*Sylow, il y a* 2 *éléments d'ordre* 2 *et chaque élément d'ordre* 3 *est dans un seul* $3-$*Sylow. D'où* $4.2 = 8$ *éléments d'ordre* 3.

*6.* $\{$*éléments d'ordre* $3\} \to \{$*éléments d'ordre* $6\}$, $g \mapsto -g$ *est injective.*

*7.* $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{$*éléments d'ordre* $3\} \cup \{$*éléments d'ordre* $6\}| \leqslant 24 - 16 = 8$. *Or les* $2-$*Sylow sont d'ordre* 8 *car* $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})| = 2^3.3$.

*8.* $\langle I, J\rangle = \{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm IJ\}$ *est d'odre* 8.

*9. Comme* $I^2 = J^2 = (IJ)^2 (= -I_2)$, *le morphisme surjectif* $L_2(a,b) \to Q$, $a \mapsto I$, $b \mapsto J$ *induit un morphisme surjectif* $Q_8 \to Q$. *Comme* $|Q| = |Q_8| = 8$, $Q_8 \simeq Q$.

†. on note $L_2(a,b)$ le groupe libre à deux générateurs