VI

Exercice 1 *Soit A un anneau intègre et $d \in A \backslash A^\times$ un élément non nul.*

a) *Montrer que tout idéal de $A\left[\frac{1}{d}\right]$ s'écrit sous la forme $IA\left[\frac{1}{d}\right]$, où I est un idéal de A.*

b) *En déduire que, si A est principal, $A\left[\frac{1}{d}\right]$ l'est aussi.*

c) *Montrer que $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ puis que $\mathbb{C}[\cos t, \sin t]$ sont des anneaux principaux.*

d) *Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]$ n'est pas principal (indication on peut commencer par déterminer $\mathbb{R}[\cos t, \sin t]^\times$).*

Exercice 2 *Soit $\mathbb{D}$ l'anneau des décimaux.*

a) *Quels sont les irréductibles ?*

b) *Calculer le PGCD de $0,77$ et 910.*

Exercice 3 *Soit $A := \mathbb{Z}[i]$, l'anneau des entiers de Gauss.*

a) *Montrer que $A/(7) \cong \mathbb{F}_7[X]/(X^2+1)$.*

b) *En déduire que 7 est irréductible dans A.*

c) *Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{F}_{p^2}$. Montrer que ce n'est pas vrai si $p = 2$.*

Exercice 4 *Soit $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.*

1. *Déterminer $A^\times$.*
2. *En remarquant que $6 = 2.3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$, montrer que A n'est pas factoriel.*
3. *Montrer que les idéaux $P_1 = (2, 1+\sqrt{-5})$, $P_2 = (3, 2+\sqrt{-5})$, $P_3 = (3, 2-\sqrt{-5})$ sont des idéaux maximaux (non principaux!) de A deux à deux distincts et que :*
$$(6) = P_1^2 P_2 P_3$$
(indication : montrer que $(2) = P_1^2$ et $(3) = P_2 P_3$)
4. *Montrer que tout idéal de A peut être engendré par 1 ou 2 éléments.*

Exercice 5 *Soit A un anneau principal. Soit $I \leqslant A[X]$ un idéal.*

a) *On suppose que I n'est pas de type fini. On définit par récurrence une suite $f_n \in I \setminus (f_0, ..., f_{n-1})$ de degré minimal. Donc la suite $\deg f_n$ est croissante. On note a_n le coefficient dominant de f_n. Montrer que la suite des idéaux de A $(a_0, ...a_n)$ est stationnaire. Soit N tel que $(a_0, ...a_n) = (a_0, ..., a_{N-1})$ pour tout $n \geqslant N$. En considérant $f_N - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i f_i X^{\deg f_N - \deg f_i}$ pour certains $\lambda_i \in A$ bien choisis, obtenir une contradiction.*

b) *On suppose que $I \cap k[X] \neq 0 \neq I \cap k[Y]$. Montrer que $k[X, Y]/I$ est de dimension finie.*

c) *Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X, Y]$. Montrer que les idéaux premiers non nuls et non maximaux de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont principaux.*

d) *Montrer que $(X, Y)^n$ est engendré par $n+1$ éléments dans $k[X, Y]$ mais pas moins (indication : considérer $(X, Y)^n/(X, Y)^{n+1}$).*

Exercice 6

a) Soit p un nombre premier $= 1 \bmod 4$. Montrer que dans $\mathbb{Z}[i]$, p est le produit de deux nombres premiers. En déduire que p est somme de 2 carrés.

b) Si m, n sont des entiers sommes de 2 carrés d'entiers, montrer que mn aussi.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est somme de deux carrés si et seulement si les nombres premiers $= 3 \bmod 4$ apparaissent dans la décomposition de n avec un exposant pair.

Exercice 7
Soit A un anneau principal.

a) Soit P un idéal premier de $A[X]$. Montrer que $P = 0$, P est principal ou P est de la forme $P = (p, f)$ où $p \in A$ est irréductible et f est irréductible dans $A/p[X]$ *(indication : considérer $P \cap A$)*. Dans ce dernier cas, montrer que P est maximal.

b) Montrer que si p est premier, l'idéal $(p, X)^n$ de $\mathbb{Z}[X]$ peut être engendré par $n + 1$ éléments mais non moins.

c) Si $A = \mathbb{C}[[t]]$ et $f = tX - 1$, montrer que (f) est un idéal maximal de $A[X]$.

d) Si A contient une infinité d'éléments irréductibles (deux à deux non associés), montrer qu'aucun idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A n'est principal *(indication : si $\mathfrak{m} = (f)$, considérer un élément irréductible de A qui ne divise aucun coefficient de f)*.

Exercice 8 Soit A l'ensemble des polynômes de la forme

$$\sum_n \frac{a_n}{n!} X^n$$

avec $\forall\, n,\ a_n \in \mathbb{Z}$.

a) Vérifier que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer que la suite d'idéaux de A :

$$(X) \subseteq (X, \frac{X^2}{2}) \subseteq \ldots \subseteq (X, \frac{X^2}{2}, \ldots, \frac{X^n}{n!}) \subseteq \ldots$$

n'est pas stationnaire.

c) En déduire un idéal de A qui n'est pas de type fini.

d) Vérifier que $(X, \frac{X^2}{2}, \ldots, \frac{X^6}{6!}) = (X, \frac{X^2}{2}, \ldots, \frac{X^5}{5!})$.

Exercice 9 a) Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X, Y]$ tel que $\mathbb{C}[X, Y]/I$ est de dimension finie. Montrer qu'il existe un nombre fini d'idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X, Y]$ qui contiennent I.

b) En déduire qu'il existe un nombre fini $\leqslant \dim \mathbb{C}[X, Y]/I$ de points $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $p(x, y) = 0$ pour tout $p \in I$.