VII — Anneaux euclidiens, exemples et contre-exemples

Exercice 1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $A = \mathbb{K}[[X]]$ l'anneau des séries formelles d'une variable. Notons la valuation standard de A par ν.*

a) *Quel sont les inversibles de A ?*

b) *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[[X]]$ tels que $\nu(P) \leqslant \nu(Q)$. Montrer que P divise Q.*

c) *En déduire que A est principal. L'anneau A est-il euclidien ?*

d) *Montrer qu'il existe un et un seul idéal maximal. On le note par $\mathfrak{m}$.*

e) *Montrer que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, il existe $n \in \mathbb{N}^\times$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$.*

f) *Notons $\mathbb{K}((X))$ le corps des fractions de $\mathbb{K}[[X]]$.*

   (a) *Montrer que $\mathbb{K}((X)) = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k X^k \ :\ \exists\ i \text{ t.q. } a_k = 0\ (\forall\ k < i)\}$.*

   (b) *En déduire que, pour tout $f \in \mathbb{K}((X))\backslash\{0\}$, $f \in \mathbb{K}[[X]]$ ou $f^{-1} \in \mathbb{K}[[X]]$.*

Exercice 2 *On sait que l'anneau $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ n'est pas euclidien. L'objectif est de montrer que A est principal.*

1. *Montrer que si a et b sont non nuls dans A, alors on peut trouver $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$, ou $2a = bq + r$, avec $N(r) < N(b)$.*
2. *a)* *Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.*

   b) *En déduire que $A/(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.*

   c) *Montrer que (2) est un idéal maximal de A.*
3. *Soit I un idéal de A et b un élément non nul de I de norme minimale. Soit $a \in I$. On suppose que $a = bq + r$. Montrer que $a \in (b)$.*
4. *On suppose ici que $2a = qb + r$.*

   a) *Montrer que $2a = qb$.*

   b) *On suppose que 2 divise q. Montrer que $a \in (b)$.*

   c) *On suppose maintenant que 2 ne divise pas q.*

      a) *Montrer que 2 divise b. On pose $b' := \frac{1}{2}b$.*

      b) *Montrer que 2 et q engendrent A comme idéal. En déduire que $b' \in I$.*

      c) *Conclure.*

Exercice 3 *Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ et $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ sont des anneaux euclidiens.*

Exercice 4 Calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 Soit A un anneau euclidien et ν un stathme associé. Soit $S \subseteq A$ une partie qui ne contient pas 0, qui contient 1 et qui est stable par produit.

Montrer que l'anneau

$$S^{-1}A := \{a/s\ :\ a \in A, s \in S\}$$

est euclidien pour $\nu'(x) := \inf\{\nu(kx)\ :\ k \in S,\ kx \in A\}$.

Exercice 6 Soit A un anneau intègre.

Montrer que si A est euclidien, il existe $x \in A$ non inversible tel que $A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$, $a \mapsto a \bmod x$ est surjective *(indication : si A n'est pas un corps, si ν est un stathme pour A, choisir x non inversible avec $\nu(x)$ minimal).*

Exercice 7 Soit $A := \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$.

a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X,Y]$, alors $P = a(X)Y + b(X) \bmod X^2+Y^2+1$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que l'on peut toujours trouver une solution $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ au système :

$$\begin{cases} x^2+y^2+1=0 \\ a(x)y+b(x)=0 \end{cases}$$

si b est non constant ou a non nul et en déduire que $A^\times = \mathbb{R}^\times$.

c) Montrer que A n'est pas euclidien.

d) Montrer que tous les idéaux premiers non nuls de A sont principaux et maximaux *(indication : montrer qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{R}[X,Y]$ qui contient strictement X^2+Y^2+1 est de la forme $\mathfrak{p} = (X^2+Y^2+1, aX+bY+c)$ pour certains $a,b,c \in \mathbb{R}$ avec a ou b non nul).*

e) Soit I un idéal non principal tel que $\dim A/I$ soit minimale. Montrer que $I \subsetneq (p)$ pour un certain p premier et que $J := \{x \in A \,:\, xp \in I\}$ est un idéal contenant I strictement *(indication : soit $x \in I$ non nul tel que $\dim A/x$ est minimale, montrer que $x/p \in J \setminus I$).* En déduire que J est principal engendré par un certain $a \in A$. Trouver une contradiction *(indication : $I = (pa)$).*

f) Conclusion ?