M1G
anneaux, corps et représentations
contrôle du vendredi 27 octobre 2023
1h30

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 a) **Question de cours.** Rappeler l'énoncé du lemme de Schur et montrer que si G est un groupe abélien fini, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

Lemme de Schur. Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $R : G \to \mathrm{GL}(E)$ une représentation irréductible. Si $f : E \to E$ est un endomorphisme tel que $\forall\, g \in G$, $\forall\, x \in E$, $f(R(g)x) = R(g)f(x)$, alors $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si G est abélien fini, si $a \in G$, alors $\forall\, g \in G$, $\forall\, x \in E$, $R(a)R(g)x = R(ag)x = R(ga)x = R(g)R(a)x$. Donc $R(a) = \lambda_a \mathrm{Id}_E$ pour un certain $\lambda_a \in \mathbb{C}$. Donc tout sous-espace de E est stable par $R(G)$. Donc E est de dimension 1.

b) Réciproquement, en utilisant des relations d'orthogonalité des tables de caractères, montrer que si G est un groupe fini dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1, alors G est abélien.

La somme des degrés des représentations irréductibles est $\sum_i n_i^2 = |G|$. Donc $\sum_i 1 = |G|$, il y a donc $|G|$ représentations irréductibles. Donc dans G il y a $|G|$ classes de conjugaison. Donc chaque classe de conjugaison a un seul élément. Donc $\forall\, g, h \in G$, $ghg^{-1} = h$ *i.e.* $\forall\, g, h \in G$, $gh = hg$.

Exercice 2 On rappelle la table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_3$:

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

a) Déterminer les trois classes de conjugaison C_1, C_2, C_3 du groupe $\mathfrak{S}_3$ et leurs cardinaux : h_1, h_2, h_3. Calculer

$$|\mathfrak{S}_3| \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{h_i} \ .$$

$C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{(12), (23), (13)\}$, $C_3 = \{(123), (132)\}$. $h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 2$.

$$|\mathfrak{S}_3| \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{h_i} = 6.(1^{-1} + 3^{-1} + 2^{-1}) = 11 \ .$$

b) On pose $\forall\, 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$, $g_{ijk} = \langle \chi_i \chi_j, \chi_k \rangle_{\mathfrak{S}_3}$.

Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant 3} g_{ijk}^2$.

Indication. Remarquer que $\forall\, i$, $\chi_1 \chi_i = \chi_i, \chi_2^2 = \chi_1$ *et utiliser les relations d'orthogonalité pour simplifier.*

Que remarque-t-on ?

Comme les χ_k forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales, $\forall i, j$, $\sum_k g_{ijk}^2 = \sum_k \langle \chi_i\chi_j, \chi_k \rangle_{\mathfrak{S}_3} = \langle \chi_i\chi_j, \chi_i\chi_j\rangle_{\mathfrak{S}_3}$. Or si i ou $j = 2$,

$$\langle \chi_i\chi_j, \chi_i\chi_j\rangle_{\mathfrak{S}_3} = 1$$

car $\chi_i\chi_j$ est irréductible (produit d'un caractère irréductible par un caractère de degré 1). Donc

$$\sum_{ijk} g_{ijk}^2 = \sum_{ij} \langle \chi_i\chi_j, \chi_i\chi_j\rangle_{\mathfrak{S}_3}$$

$$= \sum_j \langle \chi_1\chi_j, \chi_1\chi_j\rangle_{\mathfrak{S}_3} + \sum_j \langle \chi_2\chi_j, \chi_2\chi_j\rangle_{\mathfrak{S}_3} + \langle \chi_3\chi_1, \chi_3\chi_1\rangle_{\mathfrak{S}_3} + \langle \chi_3\chi_2, \chi_3\chi_2\rangle_{\mathfrak{S}_3} + \langle \chi_3^2, \chi_3^2\rangle_{\mathfrak{S}_3}$$

$$= 3 + 3 + 2 + \frac{1}{6}(4^2 + 2) = 11 \ .$$

On remarque que $\sum_{ijk} g_{ijk}^2 = |\mathfrak{S}_3| \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{h_i}$.

Cas général pour un groupe G.

$$\sum_{ijk} |g_{ijk}|^2 = \sum_{ij}\sum_k |\langle \chi_i\chi_j, \chi_k\rangle_G|^2$$

$$= \sum_{ij} |\langle \chi_i\chi_j, \chi_i\chi_j\rangle_G|^2$$

(car les χ_k forment une base orthonormée de l'espace hermitien des fonctions centrales sur G)

$$= \sum_{ij} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_i(g)\chi_j(g)\overline{\chi_i(g)\chi_j(g)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G}\sum_{ij} |\chi_i(g)|^2 |\chi_j(g)|^2$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \left(\sum_i |\chi_i(g)|^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_C \sum_{g\in C} \left(\sum_i |\chi_i(g)|^2\right)^2$$

(en regroupant les g suivant leur classe de conjugaison C)

$$= \frac{1}{|G|} \sum_C \sum_{g\in C} \left(\frac{|G|}{|C|}\right)^2$$

(par les relations d'orthogonalité des colonnes)

$$= |G| \sum_C \frac{1}{|C|}$$

après simplification.

Exercice 3 Soit $G = \mathfrak{S}_4$.

a) Rappeler quelles sont les classes de conjugaison de G et donner le cardinal de chacune. En déduire le nombre de caractères irréductibles de G.

$\{1\}$	les transpositions	les $3-$cycles	les $4-$cycles	les doubles-transpositions
1	6	8	6	3

D'où 5 classes de conjugaison et donc 5 caractères irréductibles pour G. *On admet que les deux caractères irréductibles de G sont le caractère trivial, noté χ_1, et le caractère signature, noté χ_2.*

b) On considère la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ [†]. *On admet que c'est bien une représentation.* On note χ_ρ son caractère.

Justifier que $\chi_\rho = \chi_1 + \chi_3$ où χ_3 est un caractère irréductible de degré 3. On a la décomposition $\rho(G)-$stable suivante : $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}.(1,1,1,1) \oplus V$ où $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. L'action de G sur $\mathbb{C}.(1,1,1,1)$ est triviale donc en termes de caractères, $\chi_\rho = \chi_1 + \chi_V$. Et χ_V est un caractère de degré 3. Posons $\chi_3 = \chi_V = \chi_\rho - \chi_1$. Pour tout $\sigma \in G$, $\chi_\rho(\sigma) = \mathrm{Tr}\rho(\sigma) = \sum_i \delta_{i,\sigma(i)} = |\{i : \sigma(i) = i\}|$.

Voici les valeurs de χ_3 :

	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_3	3	1	0	-1	-1

donc $\langle \chi_3, \chi_3\rangle_G = \frac{1}{24}(3^2 + 6.1^2 + 6.(-1)^2 + 3.(-1)^2) = 1$. Donc χ_3 est un caractère irréductible.

c) Soit $\rho_3 : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible associée au caractère χ_3. Donner une base de V et exprimer les matrices de $\rho_3(g)$ dans cette base pour $g = 1, (12), (123), (1234), (12)(34) \in G$.

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C}^4$. On choisit par exemple la base $v_1 = (1,-1,0,0) = e_1 - e_2, v_2 = (0,1,-1,0) = e_2 - e_3, v_3 = (0,0,1,-1) = e_3 - e_4$ de V.

On a

$$\rho((12))(v_1) = e_2 - e_1 = -v_1, \rho((12))(v_2) = e_1 - e_3 = v_1 + v_2, \rho((12))(v_3) = e_3 - e_4 = v_3$$

$$\rho((123))(v_1) = e_2 - e_3 = v_2, \rho((123))(v_2) = e_3 - e_1 = -v_1 - v_2, \rho((123))(v_3) = e_1 - e_4 = v_1 + v_2 + v_3$$

$$\rho((1234))(v_1) = e_2 - e_3 = v_2, \rho((1234))(v_2) = e_3 - e_4 = v_3, \rho((1234))(v_3) = e_4 - e_1 = -v_1 - v_2 - v_3$$

$$\rho((12)(34))(v_1) = e_2 - e_1 = -v_1, \rho((12)(34))(v_2) = e_1 - e_4 = v_1 + v_2 + v_3, \rho((12)(34))(v_3) = e_4 - e_3 = -v_3$$

d'où les matrices dans la base (v_1, v_2, v_3) de V :

$$\rho_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_3((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3((123)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_3((1234)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \rho_3((12)(34)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

†. On utilise le symbole de Kronecker $\delta_{x,y} = 1$ si $x = y$, 0 sinon.

d) On pose $\chi_4 = \chi_2\chi_3$. Justifier que c'est encore un caractère irréductible de degré 3 et que $\chi_4 \neq \chi_3$.
Comme χ_2 est de degré 1, $\chi_2\chi_3$ est encore un caractère. De plus,

$$\langle \chi_2\chi_3, \rangle \chi_2\chi_3 \rangle_G = \frac{1}{|G|}(\sum_{g\in G} \underbrace{|\chi_2(g)|^2}_{=1} |\chi_3(g)|^2) = \langle \chi_3, \chi_3 \rangle_G = 1$$

donc χ_4 est irréductible. Comme $\chi_4((12)) = \chi_2((12))\chi_3((12)) = -1 \neq 1 = \chi_3((12))$, on a bien $\chi_4 \neq \chi_3$.

e) En utilisant les relations d'orthogonalité, compléter la table de caractères de G.

	1	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	n_5	a	b	c	d

On utilise l'orthonormalité des colonnes :

$$1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + n_5^2 = 24 \Rightarrow n_5 = 2\ .$$

La deuxième colonne est orthogonale à la première donc :

$$1 - 1 + 3 - 3 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

de même :

$$1 + 1 + 2b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$1 - 1 - 3 + 3 + 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$1 + 1 - 3 - 3 + 2d = 0 \Rightarrow d = 2$$

conclusion :

	1	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_5	2	0	-1	0	2

f) Décomposer chaque caractère $\chi_i|_{A_4}$ en somme de caractères irréductibles du groupe alterné A_4. Vérifier qu'on obtient ainsi tous les caractères irréductibles de A_4.
$\chi_1' := \chi_1|_{A_4} = \chi_2|_{A_4} = 1$ est un caractère irréductible. $\chi_3' := \chi_3|_{A_4} = \chi_4|_{A_4}$ est irréductible aussi car :

$$\langle \chi_3', \chi_3' \rangle_{A_4} = \frac{1}{|A_4|} \sum_{g\in A_4} |\chi_3(g)|^2 = \frac{1}{12}(3^2 + 3.(-1)^2) = 1.$$

Soit $\chi_5' := \chi_5|_{A_4}$.

$$\langle \chi_5', \chi_5' \rangle_{A_4} =$$